





18172



B. I^d

I

641

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA ANALITICA.

606807

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA ANALITICA

ESTRATTI DALLE ISTITUZIONI DI MATEMATICA SUPERIORE

DEL

D. Giuseppe Filippo Herr

Professore di Geometria Pratica nell'I. R. Istituto Politecnico a Vienna;

VOLTATI DAL TEDESCO IN ITALIANO ED AGGIUNTAVI UN' INTRODUZIONE
SU I PROBLEMI DETERMINATI DI 1° e 2° GRADO

dal

R. Prof. M. D'Annotti.



NAPOLI

PRESSO VINCENZO PUZZIELLO EDITORE

Strada Toledo N. 346

1859.

INTRODUZIONE

CONTENENTE I PRINCIPI DELL'APPLICAZIONE DELL'ALGEBRA
AI PROBLEMI GEOMETRICI DETERMINATI DI 1° E 2° GRADO.

CAPO PRIMO.

Costruzione delle equazioni ad un'incognita di 1° e 2° grado.

1. In un problema geometrico, del pari che in una quistione puramente numerica, si hanno quantità note e quantità incognite: e siccome le relazioni che l'enunciato di un problema numerico stabilisce tra le due classi di grandezze (note ed incognite) somministrano il mezzo di tradurlo in equazione, così potrà farsi altrettanto rispetto ad un quesito di geometria, quando i teoremi di questa scienza ci possono offrire sufficienti relazioni numeriche tra le linee note e le incognite. Ci serva di esempio il seguente

Problema. Dal punto C (*fig. I*), dato sul prolungamento del diametro AB, si vuol condurre una secante CE al semicerchio AEB, in modo che la parte intercetta DE pareggi la corda BD.

Sia O il centro del semicerchio dato: facciamo il raggio $OB=r$, la distanza $BC=h$; e chiamiamo x la parte esterna della segante richiesta CE, ed y la parte intercetta.

Dovendo esser $DE=BD$, sarà l'angolo $EOD=BOD$, e così la OD, bisecando l'angolo O del triangolo COE, dividerà (per un noto teorema di geometria) il lato CE nelle parti ED e DC, rispettivamente proporzionali ai lati OE, OC. Avremo in conseguenza:

$$OC : OE = DC : DE,$$

ossia

$$r + h : r = x : y$$

Daltronde le seganti CA, CE dovendo esser in ragione inversa delle parti esterne CB, CD, si avrà l'altra proporzione:

$$CA : CE = CD : CB,$$

ossia

$$2r + h : x + y = x : h;$$

la quale, mercè la sostituzione di $\frac{rx}{r+h}$ ad y , che si ottiene dalla proporzione precedente, diverrà:

$$r + h : x = x : h,$$

dondo

$$x^2 = (r + h)h, \text{ ed } x = \sqrt{(r+h)h}.$$

Così, essendo dati i valori numerici di r ed h , si potrà determinare quello di x ; che preso poi come raggio, e descrittore un cerchio col centro C, farà conoscere il sito della secante CE, la cui parte esterna è stata già definita di valore.

Ma senza attuare questi calcoli numerici, la natura soltanto della funzione esprimente il valore di x sarà sufficiente ad indicare la costruzione da farsi per ottenere la soluzione grafica del problema. Ed in vero l'ultima delle proporzioni precedenti ci mostra x media proporzionale tra $r + h$ ed h , ossia tra OC e BC; basterà dunque costruire questa media proporzionale, ed il problema sarà risoluto. A tal uopo sulla OC come diametro si descriva il semicerchio OFC; dal punto B si elevi BF perpendicolare ad OC, e la corda CF sarà la media proporzionale richiesta tra OC e BC. E prendendo poi C come centro e descrivendo un cerchio coll'intervallo CF, si avrà il punto D, che compierà la soluzione del problema, determinando il sito della secante CE.

Queste operazioni grafiche, eseguite per la determinazione della incognita ed indicate dalla natura della funzione che ne rappresenta il valore, costituiscono ciò che dicesi costruzione di una equazione.

2. Nell'esempio qui sopra recato chiaramente si vede come l'uso dell'algebra nella soluzione dei problemi geometrici richiegga l'attuazione di tre distinte operazioni. La prima consiste nella traduzione del problema in equazione, attuata mercè l'espressione algebrica delle relazioni di quantità che i teoremi geometrici fanno scorgere tra le grandezze note e l'incognita. Indi

si passa a risolvere l'equazione secondo i metodi appresi nell'algebra; infine si dovrà costruire l'equazione risolta. Or questa terza parte della soluzione algebrica di un problema geometrico si deduce dalla natura stessa della funzione che rappresenta il valor dell'incognita, determinando le costruzioni corrispondenti a certe funzioni semplici, perchè servissero di elementi per la costruzione delle altre. Le quali costruzioni elementari, avendo riguardo alla natura dei problemi considerati in questa introduzione, si riducono alle seguenti:

$$x = a, \quad x = \frac{ab}{c}, \quad x = \sqrt{ab}, \quad x = \sqrt{a^2 \pm b^2}.$$

1) Costruzioni dipendenti da $x = a$.

3. Una linea non potendo ammettere altra espressione algoritmica della sua quantità se non quella indicante il numero di volte che l'unità lineare vi è contenuta, egli è chiaro che questo numero mercè l'elemento alfabetico che lo rappresenta in generale, disegnerà la lunghezza di una linea. Quindi le equazioni risolte sotto la forma $x = a$, esprimeranno nel loro significato geometrico che l'unità lineare dovrà portarsi a volte sulla linea data nell'enunciato del problema.

Interpolata geometricamente la forma primitiva $x = a$, egli è facile intendere il significato delle forme $x = ab$, $x = abc$, sapendosi dalla geometria che l'area di un rettangolo è rappresentata dal prodotto dei lati contigui a e b , che il volume di un parallelepipedo rettangolare lo è dal prodotto dei tre spigoli a , b , c , concorrenti al vertice di un angolo solido. Donde poi è derivato il nome di dimensioni che nell'algebra si è dato al numero dei fattori letterali di una funzione monomia.

2) Costruzioni dipendenti da $x = \frac{ab}{c}$.

4. Dalla proporzione

$$c : b = a : x$$

si rileva che la funzione $\frac{ab}{c}$ rappresenta una retta, quarta proporzionale in ordine alle tre rette date c , b , a . Laonde costruito un angolo rettilineo qualunque MNS (fig. II), prese le parti

$NP = c$, $PM = b$, $NQ = a$, e congiunti i punti P e Q, la MS parallela a PQ determinerà $QS = \frac{ab}{c} = x$.

Alla forma $\frac{ab}{c}$ sono riducibili le forme complesse $\frac{abc}{de}$, $\frac{abcd}{efg}$, ecc. Ed invero, essendo

$$\frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \times \frac{c}{e},$$

ed $\frac{ab}{d}$ rappresentando una quarta proporzionale q in ordine a d , b , a , avremo:

$$\frac{abc}{de} = \frac{qc}{e},$$

che disegnerà una nuova quarta proporzionale in ordine ad e, c, q .

E similmente si troverà che $\frac{abcd}{efg}$ si costruirà con tre successive quarte proporzionali, l'ultima delle quali esprimerà il significato geometrico della funzione.

Or combinando la forma $x = \frac{ab}{c}$ colle altre due $x = ab, x = abc$ si troverà che

$$x = \frac{abcd}{ef} = \frac{ab}{e} \cdot \frac{cd}{f}$$

significa un rettangolo, definito dalle due quarte proporzionali $\frac{ab}{e}$, $\frac{cd}{f}$; e che

$$x = \frac{abcdef}{ghl} = \frac{ab}{g} \cdot \frac{cd}{h} \cdot \frac{ef}{l}$$

rappresenta un parallelepipedo, le cui tre dimensioni sono $\frac{ab}{g}$, $\frac{cd}{h}$, $\frac{ef}{l}$.

Donde si rileva che una funzione frazionaria razionale con termini monomii rappresenterà una retta, un rettangolo, o un parallelepipedo rettangolare, secondochè il numeratore di essa conterrà una, due, o tre dimensioni di più che il denominatore. Ma se poi la funzione frazionaria avesse egual numero di dimensioni nei due termini, come $\frac{a}{b}$, $\frac{ab}{cd}$, $\frac{abc}{deg}$, ecc. sarebbe allora l'espres-

sione di un numero astratto, rappresentante il rapporto di due linee, due superficie, o due volumi, secondochè i due termini della frazione avranno una, due o tre dimensioni.

3) Costruzioni dipendenti da $x = \sqrt{ab}$.

5. Essendo il medio proporzionale geometrico di due numeri eguale alla radice 2^a del loro prodotto, è chiaro che $\sqrt{ab}$ rappresenterà una retta, media proporzionale tra le due, a e b . Perciò, descritto un semicerchio (*fig. III*), prendendo per diametro $AB = a$, che supponiamo esser la maggiore delle due, e tolta $AD = b$, si elevi la DS perpendicolare ad AB ; la corda AS sarà la media proporzionale richiesta. La quale poteva ancora costruirsi descrivendo un semicerchio sul diametro $a + b$, ed elevando una perpendicolare dal punto di unione delle due rette.

Alla forma $\sqrt{ab}$ sono evidentemente riducibili le forme:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + ab} &= \sqrt{a(a+b)}, \\ \sqrt{\frac{abc}{d}} &= \sqrt{a \cdot \frac{bc}{d}}, \\ \sqrt{\frac{abcd}{ef}} &= \sqrt{\frac{ab}{e} \cdot \frac{cd}{f}} \\ \text{ecc.} & \qquad \text{ecc.}\end{aligned}$$

Or è da osservarsi che in questi esempi i monomi che stanno sotto il segno radicale, hanno due dimensioni, mentre le corrispondenti funzioni irrazionali non rappresentano che lunghezze; dimodochè il numero delle dimensioni di una funzione irrazionale sarà dato dal quoziente del numero delle dimensioni della funzione sottoposta al segno radicale, diviso per l'indice della radice.

4) Costruzioni dipendenti da $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

6. Pel noto teorema sulle relazioni esistenti tra l'ipotenusa ed i cateti di un triangolo rettangolo, si ha che $\sqrt{a^2 + b^2}$ rappresenterà l'ipotenusa del triangolo, di cui a e b sono i cateti. Perciò togliendo su i lati di un angolo retto, a contar dal vertice, due parti rispettivamente eguali ad a e b , la congiungente dei loro punti estremi sarà il valore di $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

E se prendiamo sopra un lato dell'angolo retto una porzione

$= b$, e dall'estremo di questa come centro e col raggio $a > b$ descriviamo un cerchio, la porzione che verrà determinata sull'altro lato dell'angolo retto, rappresenterà in virtù dello stesso teorema il valore di $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, vale a dire il cateto di un triangolo rettangolo, di cui a è l'ipotenusa e b l'altro cateto.

Alla costruzione di $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ è riducibile quella di ogni radicale del 2° grado che tenga sottoposto al segno un polinomio, i cui termini, interi o fratti, abbiano due dimensioni. Prendiamo ad esempio:

$$x = \sqrt{ab + \frac{cde}{h} - \frac{fgm}{p}}$$

Rappresentando $\frac{cd}{h}$ una quarta proporzionale q , ed $\frac{fg}{p}$ un'altra quarta proporzionale r , sostituendo avremo:

$$\sqrt{ab + \frac{cde}{h} - \frac{fgm}{p}} = \sqrt{ab + eq + mr}.$$

Or chiamando y, z, v le medie proporzionali tra a e b, q ed e, m ed r ; saranno:

$$ab = y^2, eq = z^2, mr = v^2,$$

ed il radicale si troverà ridotto alla forma $\sqrt{y^2 + z^2 - v^2}$ che sarà semplificata nell'altra, $\sqrt{k^2 - v^2}$, quando siasi determinata l'ipotenusa k del triangolo rettangolo di cui sono cateti y e z .

7. Le due forme $\sqrt{ab}, \sqrt{a^2 \pm b^2}$ si riferiscono ad equazioni pure del 2° grado; ma combinando la 2ª di esse coll'altra, $x = a$, si avrà la costruzione delle equazioni complete dello stesso grado. Poniamo data l'equazione:

$$x^2 - px + q^2 = 0,$$

le cui radici sono rappresentate da

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}.$$

Per averne la rappresentazione geometrica, si prenda la retta $AB = p$ (fig. IV), si divida per metà, e togliendo una di queste a diametro si descriva il semicerchio OMB; indi col punto B

come centro e coll' intervallo $BM = q$ si determini il punto M ; sarà $OM = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2}$. Quindi prendendo $ON = OM$, avremo le due radici:

$$\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2} = AO + ON = AN,$$

$$\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2} = BO - ON = BN.$$

Ma queste radici si potevano costruire senza risolvere l'equazione proposta; imperocchè dovendo per la teorica delle equazioni esser $q^2 = AN.NB$, e $p = AN + NB$, bastava descrivere sulla $AB = p$ il semicerchio ALB ; dall'estremo B del diametro elevare la perpendicolare $BK = q$; dal punto K condurre KL parallela ad AB ; ed abbassare in fine dal punto L d'intersezione colla circonferenza la perpendicolare LN ad AB : avremmo così ottenuto $AN + NB = p$, $AN.NB = \overline{NL}^2 = q^2$.

8. Se nell'equazione proposta il termine q^2 sia negativo, si avrà

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}$$

In questo caso tolta $AB = p$ (*fig. V*) ed elevata su essa la perpendicolare $BC = q$, la congiungente OC del punto C col punto O , medio di AB , rappresenterà $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2}$; quindi trasportando OC in OE si avrà:

$$\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2} = AO + OE = AE,$$

$$\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q^2} = OB - OE = BE.$$

Ma descrivendo sulla AB come diametro il cerchio $ALBD$, si avrà $LC = BE$; le radici dell'equazione saranno rappresentate da DE e CL , e $BC = q$ sarà tangente al cerchio descritto. Laonde per costruire le radici dell'equazione $x^2 + px - q^2 = 0$, si descriverà sul diametro $AB = p$ una circonferenza; da un punto qualunque B di essa si menerà la tangente $BC = q$; e condotto pel centro la secante DC , i segmenti CD e CL saranno i valori geometrici delle due radici.

9. Nelle due equazioni di 2° grado, tolte ad esempio nei due numeri precedenti, non abbiamo considerato che il segno del termine noto q^2 , sapendosi dalla teorica delle equazioni che il termine in x^2 dev'esser sempre positivo, e che il segno di px non può aver influenza sul valore assoluto delle radici.

10. Osserviamo in fine che i polinomii considerati nelle costruzioni precedenti, erano omogenei, vale a dire che tutti i loro termini avevano uno stesso numero di dimensioni. E questa condizione è indispensabile, perchè un polinomio possa aver significato geometrico, imperocchè sarebbe assurdo supporre che linee si potessero addizionare o sottrarre insieme a superficie, volumi e numeri. Ma un polinomio potrà non esser eterogeneo che in apparenza, la qual cosa avverrebbe sicuramente se qualcuna delle dimensioni si fosse tolta per unità lineare. Così ponendo $c = 1$ nel polinomio:

$$ab + \frac{bcd}{m} - \frac{c^2de}{ns},$$

questo diverrebbe

$$ab + \frac{bd}{m} - \frac{de}{ns},$$

In questo caso i termini torneranno a divenire omogenei, introducendo in quelli, che hanno minor numero di dimensioni, l'unità tante volte come fattore, quante ne saranno necessarie perchè il numero delle dimensioni pareggiasse il massimo che ivi si osserva. Così l'ultima espressione ritornerà ad esser omogenea sotto la forma:

$$ab + \frac{bd.1}{m} - \frac{de.1.1}{ns}.$$

CAPO SECONDO.

*Applicazione dei principii precedenti
alla soluzione di alcuni problemi.*

Problema I.

11. Dati i tre lati di un triangolo, determinarne l'area, il raggio del cerchio iscritto e quello del cerchio circoscritto.

Sia ABC (*fig. VI*) il triangolo dato, ed a , b , c i lati opposti agli angoli di analoga denominazione. Dal vertice B conducendo sulla AC la perpendicolare Bm, avremo la superficie del triangolo espressa da:

$$\frac{1}{2} BC. Bm = \frac{1}{2} b \sqrt{c^2 - Am^2}. \quad (1)$$

Ma per un noto teorema di Geometria si ha

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b. Am;$$

donde

$$Am = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}.$$

Sostituendo questo valore nell'equazione (1) ed indicando con S la superficie del triangolo, si ottiene:

$$S = \frac{1}{2} b \sqrt{c^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2}} = \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}.$$

Or trasformando la quantità sottoposta al segno radicale in quest'ultima espressione, mercè il teorema che pone la differenza di due quadrati eguale al prodotto della somma per la differenza delle corrispondenti radici, avremo:

$$\begin{aligned} 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 &= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] \\ &= (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b). \end{aligned}$$

Ma se poniamo il perimetro $a + b + c = 2p$, avremo

$a + c - b = 2(p - b)$, $b + a - c = 2(p - c)$, $b + c - a = 2(p - a)$;
e sostituendo questi valori nell'espressione della superficie del triangolo, si avrà:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Per ottenere poi l'espressione del raggio r del cerchio iscritto, osserviamo che la superficie del triangolo evidentemente può esser rappresentata da:

$$\frac{1}{2} r (a + b + c) = pr.$$

Sarà dunque $S = pr$, ed in conseguenza:

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

In fine rispetto al raggio R del cerchio circoscritto allo stesso triangolo ABC (*fig. VII*) osserviamo che condotto il diametro BK , congiunto il punto K con A , ed abbassata la perpendicolare Bm ad AC , i due triangoli ABK ed AmC risulteranno simili, e daranno in conseguenza la proporzione:

$$BK : AB = BC : Bm,$$

ossia

$$2R : c = a : Bm;$$

donde

$$Bm = \frac{ac}{2R},$$

ed

$$S = \frac{1}{2} b \cdot Bm = \frac{abc}{4R}.$$

Quindi

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Problema II.

Iscrivere un quadrato in un triangolo dato.

Supponiamo il problema già risoluto, e che il rettangolo ml (*fig. VIII*), iscritto nel triangolo dato ABC , sia un quadrato. Facciamo la base $AC = b$, l'altezza $Bn = a$, $mg = mh = x$, quindi $BO = a - x$. Ciò posto, i due triangoli simili ABC , mlg ci daranno la proporzione:

$$AC : mg = Bn : Bo,$$

ossia

$$b : x = a : a - x;$$

donde

$$ab = (a + b)x, \text{ ed } x = \frac{ab}{a + b}.$$

Per costruire la quarta proporzionale $\frac{ab}{a+b}$, si prolunghi AC in D , finchè sia $CD = a$; si unisca B con D ; pel punto C si conduca Cm parallela a BD , e per m la mh perpendicolare ad AC ; sarà mh il lato del quadrato richiesto. Imperocchè avremo

le proporzioni :

$$\begin{aligned} AD : AC &= AB : Am \\ &= Bn : mh, \end{aligned}$$

ossia $a + b : b = a : mh;$

sarà dunque $x = mh$. Quindi menando mg parallela e gl perpendicolare ad AC , mg sarà un quadrato.

Problema III.

Per un punto dato fuori di un cerchio si vuol menare una secante in modo che la parte intercetta dalla circonferenza sia eguale ad una retta data.

Sia A (*fig. IX*) il punto dato fuori del cerchio BDC , e c la retta data. Pel punto A e pel centro O si conduca la secante AC , e si faccia $OC = r$, $AB = a$. Immaginando condotta la secante As in modo che sia $ns = c$, e chiamando x la parte esterna An , avremo:

$$AC : As = An : AB,$$

ossia

$$a + 2r : c + x = x : a;$$

donde

$$x^2 + cx - a(a + 2r) = 0,$$

equazione simile a quella considerata nel n° 8. E per applicarvi la stessa costruzione ivi data, bisognerà soltanto determinare il lato del quadrato equivalente al rettangolo $a(a + 2r)$; ciò che si ottiene conducendo pel punto A la tangente AD al cerchio dato, essendo noto che il quadrato di AD pareggia il rettangolo di AB in AC , ossia $a(a + 2r)$.

Ciò posto, si prenda sul raggio DO la porzione $Dm = \frac{1}{2}c$, e col punto m come centro e col raggio mD si descriva il cerchio Deg ; indi pel centro m si conduca Ag ; ed Ae , Ag (n° 8) saranno i due valori di x . Quindi descrivendo col punto A come centro e col raggio Ae un arco di cerchio, i punti d'intersezione n ed n' col cerchio dato determineranno le due secanti As ed As' che soddisferanno la condizione richiesta.

Problema IV.

Per due punti dati, A e B (*fig. X*) sulla circonferenza

za di un cerchio si vogliono condurre due corde parallele AD, BC, tali che il trapezio ABCD risulti equivalente ad un quadrato dato.

Ponendo che ABCD sia il trapezio richiesto, immaginiamo condotta pel punto l , medio di AB, la ln parallela a BC, dal centro O la Om perpendicolare ad ln , e la Bv perpendicolare ad AD.

È chiaro che sarà $lm = mn$, e che in conseguenza l'aja del trapezio ABCD sarà espressa da $2lm.Bv$.

Or condotta la Ol , poniamo $AB = a$, $Ol = c$, $Bv = x$, ed il quadrato dato $= q^2$. I due triangoli simili ABv , $Ol m$ ci danno la proporzione:

$$lm : Ol = Bv : AB,$$

ossia

$$lm : c = x : a;$$

donde

$$lm = \frac{cx}{a}, \text{ e } 2lm.Bv = \frac{2cx^2}{a}.$$

Quindi l'equazione del problema sarà:

$$\frac{2cx^2}{a} = q^2,$$

dalla quale sia ha:

$$x = \sqrt{\frac{aq^2}{2c}}.$$

Per costruire questo radicale si prendano su i lati dell'angolo BAC (*fig. XI*) le parti $Am = 2c$, $An = q$, $As = a$; ed unito il punto m con s si conduca alla congiungente ms la parallela nz : sarà $Az = \frac{aq}{2c}$. Quindi $\frac{aq^2}{2c} = Az.q$, ed il radicale esprimerà la media proporzionale tra Az ed An . Perciò trasportata la Az in Ah , descritto il semicerchio Atn , ed elevata la ht perpendicolare ad An , sarà At la media proporzionale richiesta. Laonde descritto un semicerchio sulla AB (*fig. X*) come diametro ed applicata in esso la corda $Bv = At$, la AD condotta poi punti A e v sarà una delle basi del trapezio richiesto.

Se risultasse $Bv = AB$, il trapezio diverrebbe un rettangolo; e se poi riuscisse $Bv > AB$, il problema sarebbe assurdo.

SEZIONE PRIMA.

GEOMETRIA ANALITICA NEL PIANO.

CAPO PRIMO.



DETERMINAZIONE DEL LUOGO DI UN PUNTO — SISTEMI DI COORDINATE — TRASFORMAZIONE DI ESSE.

1. Siano XX' , YY' (*fig. 1*) due rette non parallele, date di posizione in un piano; ed in questo un punto M , il cui sito si vuol determinare. Conducendo le due rette MQ ed MP , rispettivamente parallele ad XX' ed YY' , è chiaro che le loro lunghezze definiranno il sito del punto M nell'angolo XOY .

Le due rette MP ed MQ diconsi coordinate del punto M ; l'una di esse, la $MQ = OP$, la quale è parallela alla retta fissa XX' , suol indicarsi con x , e con y l'altra, parallela alla retta fissa YY' ; alla prima si dà il nome speciale di ascissa, e quello di ordinata del punto M alla seconda.

Le due rette fisse XX' , YY' si dicono assi coordinati, ed in ispecie asse delle x o delle ascisse, ed asse delle y o delle ordinate; al punto d'intersezione O si dà nome di origine, imperocchè da esso vanno contate le due coordinate $OP = MQ = x$, ed $OQ = MP = y$; l'angolo XOY , formato dagli assi, si appella angolo delle coordinate, e l'insieme dei due assi forma un sistema di coordinate. Il quale si dirà rettangolare, se l'angolo degli assi è retto, ed obliquo in ogni altro caso.

Purtuttavia il sito del punto M nel piano non sarà perfettamente definito mediante i valori numerici delle sue coordinate MP ed MQ , imperocchè le stesse coordinate evidentemente appartengono ancora agli altri tre punti M' , M'' , M''' , i quali sono con M ad eguali distanze dagli assi. Per distinguere questi quattro punti

l'un dall'altro, basterà apporre i segni + e — alle coordinate. Si usa riguardar come positive le ascisse che procedono dall'origine a dritta nella direzione OX, e negative quelle che vanno a sinistra nella direzione OX'; le ordinate, tolte da O in alto secondo OY, positive, e negative quelle che seguiranno la direzione OY'.

L'origine dividendo ciascuno degli assi in due semiasse, potremo per brevità chiamar l'uno semiasse positivo, l'altro semiasse negativo. Dei quattro angoli risultanti dall'intersezione degli assi intenderemo per angolo delle coordinate sempre quello costituito dai due semiasse positivi, il quale sarà sempre $< 180^\circ$.

Laonde disegnando con m ed n i valori numerici delle coordinate MP ed MQ, otterremo pei quattro punti M, M', M'', M''' il seguente schema :

$$M \begin{cases} x = +m \\ y = +n \end{cases} \quad M' \begin{cases} x = -m \\ y = +n \end{cases} \quad M'' \begin{cases} x = -m \\ y = -n \end{cases} \quad M''' \begin{cases} x = +m \\ y = -n \end{cases}$$

Donde si rileva che mediante le due equazioni :

$$1. \quad x = a, \quad y = b$$

il sito del punto M sarà definito compiutamente e senza equivoco, se con a e b intenderemo rappresentare i valori delle coordinate, preceduti dai segni che loro convengono. Ed è perciò che le equazioni 1 vengono denominate equazioni del punto.

Come casi speciali dell'equazioni 1 sono da notarsi i seguenti.

1) $x = a, y = 0$; queste equazioni appartengono ad un punto giacente sull'asse delle ascisse.

2) $x = 0, y = b$, che appartengono ad un punto giacente sull'asse delle ordinate; ed in fine sono

3) $x = 0, y = 0$ le equazioni dell'origine stessa.

Il suindicato metodo per la determinazione di un punto nel piano, mercè due coordinate parallele a due assi fissi che s'intersecano (e perciò denominato sistema delle coordinate parallele), non è pertanto il solo mezzo al suddetto fine; altri se ne sono facilmente escogitati; e tra questi è di speciale importanza ed uso frequente il così detto sistema delle coordinate polari. Immaginiamo tolta per asse, asse polare, una retta XX' (fig. 1) fissa in un piano, ed in essa un punto fisso O, quale origine, che qui va denominata polo; e da questo sia menata la

retta OM ad un punto qualunque M del piano. Egli è chiaro che il luogo del punto M sarà definito, quando siano date la lunghezza della retta OM, e la sua inclinazione ad un semiasse, p. e. OX, e quindi l'angolo MOX. La retta OM dicesi raggio vettore del punto M, e l'angolo MOX potrebbe dirsi angolo polare: indicheremo ordinariamente il primo con r , il secondo con θ . Questo angolo, quando non si dica espressamente il contrario, sarà contato dal semiasse destro OX da 0° fino a 360° , e propriamente, se immaginiamo di star sul punto O del piano, da destra a sinistra; quindi è che in generale r sarà sempre positivo.

2. Se, come nella fig. 1, l'asse polare coincide con quello delle ascisse ed il polo coll'origine, le coordinate parallele x, y di un punto M avranno relazioni semplicissime colle rispettive coordinate polari. Ed in vero, ponendo l'angolo XOY $= \varphi$, il triangolo OMP ci darà le equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \frac{\sin(\varphi - \theta)}{\sin \varphi}, \\ y &= r \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \end{aligned} \right\} (1) \quad \left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \varphi}, \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{y \sin \varphi}{x + y \cos \varphi} \end{aligned} \right\} (2)$$

Se il sistema delle coordinate parallele è rettangolare, sarà $\varphi = 90^\circ$, e con ciò;

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \right\} (3) \quad \left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} (4)$$

Si comprenderà facilmente che queste formole in generale valgono in qualunque degli angoli formati dagli assi possa giacere il punto M.

TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE.

3. Sovente avviene di dover passare dal sistema di coordinate, di cui si è fatto uso nel trattare una quistione, ad un' altro sistema che renda più semplici le equazioni, o almeno meglio adattate allo scopo di quella ricerca. Questo problema va sotto il nome di trasformazione delle coordinate, e si riduce evidentemente ad esprimere le coordinate di un punto, cor-

rispondenti al sistema primitivo, mercò quelle che si rapportano al nuovo sistema, supponendo purtuttavia che di questo sistema sia data la posizione rispetto al primitivo.

Il caso più semplice è quello in cui si vuole semplicemente alterar l'origine, lasciando invariata la direzione degli assi.

Siano OX, OY (fig. 2) gli assi primitivi, rispetto ai quali siano date le coordinate $OP = x, MP = y$ di un punto qualunque M : sia in ultimo O' l'origine del nuovo sistema, i cui assi $O'X', O'Y'$ debbono rimanere paralleli ai primi: indicando con a e b le coordinate della nuova origine O' prese sull'antico sistema, e con x', y' le nuove coordinate del punto M , avremo $OP = OB + BP = OB + O'P', MP = PP' + MP' = O'B + MP'$, ossia

$$x = a + x', \quad y = b + y'$$

4. Passare da un sistema obbliquo di coordinate ad un altro sistema obbliquo conservando la stessa origine.

Sia (fig. 3) l'antico angolo delle coordinate $XOY = \varphi$, il nuovo $X'OY' = \varphi'$; e θ, θ' siano gli angoli che il raggio vettore OM del punto M , forma cogli assi OX, OX' : indicando con x, y le antiche e con x', y' le nuove coordinate pel punto M , avremo per l'equazione (1) del n° 2:

$$x = \frac{r \sin(\varphi - \theta)}{\sin \varphi}, \quad y = \frac{r \sin \theta}{\sin \varphi}, \quad (m)$$

$$x' = \frac{r \sin(\varphi' - \theta')}{\sin \varphi'}, \quad y' = \frac{r \sin \theta'}{\sin \varphi'}. \quad (n)$$

Or essendo α, α' gli angoli che i nuovi assi delle ascisse ed ordinate formano coll'antico asse delle ascisse, sarà:

$\varphi' = \alpha' - \alpha, \quad \theta' = \theta - \alpha$, quindi $\varphi' - \theta' = \alpha' - \theta$; e mercè questi valori le equazioni (n) si trasformeranno in:

$$x' = \frac{r \sin(\alpha' - \theta)}{\sin(\alpha' - \alpha)}, \quad y' = \frac{r \sin(\theta - \alpha)}{\sin(\alpha' - \alpha)},$$

dalle quali, svolgendone i numeratori, si otterranno le altre due:

$$\begin{aligned} x' \sin(\alpha' - \alpha) &= r \sin \alpha' \cos \theta - r \cos \alpha' \sin \theta, \\ y' \sin(\alpha' - \alpha) &= -r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta. \end{aligned}$$

Moltiplicando la 1^a di queste due equazioni per $\cos \alpha$, la 2^a per $\cos \alpha'$, indi addizionandole, si avrà, dopo avervi soppresso il fattor comune $\sin(\alpha' - \alpha)$,

$$r \cos \theta = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha'.$$

Addizionando ancora le stesse equazioni, dopo averne moltiplicata la 1^a per $\sin \alpha$, la 2^a per $\sin \alpha'$, ne verrà:

$$r \sin \theta = x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'.$$

Sostituendo in fine questi valori di $r \cos \theta$ ed $r \sin \theta$ nelle equazioni (m), si avranno le richieste formole di trasformazione:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) + y' \sin(\varphi - \alpha')}{\sin \varphi}, \\ y &= \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

E se anche l'origine dovesse trasportarsi in un punto, le cui coordinate prese sull'antico sistema siano a , b , le equazioni (1) darebbero

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) + y' \sin(\varphi - \alpha')}{\sin \varphi}, \\ y &= b + \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Del resto, quando un problema richiegga che siano cangiate l'origine e la direzione degli assi, gioverà ordinariamente di attuare queste due trasformazioni l'una dopo l'altra.

Le formole (2) e (3) valgono in generale, qualunque sia per essere la direzione dei nuovi assi, purchè per α ed α' s'intendano gli angoli che i nuovi semiassi positivi delle x' ed y' formano coll'antico semiasse positivo delle x , numerandoli nella direzione di OX verso OY da 0° fino a 360°.

5. Nel maggior numero dei casi viene adoperato il sistema delle coordinate rettangolari, come quelle che ordinariamente rendono semplicissime le espressioni.

Quindi è che ci facciamo a considerare anche i seguenti casi particolari.

1. Passare da un sistema rettangolare di coordinate ad un sistema obliquo.

Le formole all'uopo inservienti si ottengono dalle formole generali (3), nelle quali ponendo $\varphi = 90^\circ$, si ottengono:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + x' \cos \alpha + y' \cos \alpha', \\ y &= b + x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

II. Passare da un sistema obbliquo ad un sistema rettangolare di coordinate.

Ponendo nelle equazioni (3) $\alpha' = 90^\circ + \alpha$, quindi $\varphi - \alpha' = -[90^\circ - (\varphi - \alpha)]$, si avrà:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) - y' \cos(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi}, \\ y &= b + \frac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

III. Passare da un sistema rettangolare di coordinate ad un altro sistema rettangolare.

A tal uopo ponendo nelle equazioni (3) $\varphi = 90^\circ$, ed $\alpha' = \alpha + 90^\circ$, avremo:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

DISTANZA DI DUE PUNTI DATI.

6. Siano (*fig. 4*) M, M' due punti, di cui siano dato le coordinate rettangolari, x, y ed x', y' ; si vuole un' espressione della distanza $D = MM'$ di essi punti in funzione delle loro coordinate. Si conducano le ordinate $MP = y, M'P' = y'$; e per uno dei punti, e sia M, si meni la MR parallelamente all' asse delle x . Il triangolo rettangolo MM'R ci darà

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{M'R}^2;$$

ma

$$MR = x' - x, \quad M'R = y' - y;$$

dunque

$$D = \pm \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

Il doppio segno vuol dire che la distanza D può esser presa da M verso M', ovvero in opposta direzione. Ma in generale le distanze son prese sempre positivamente.

In simil guisa si avrebbe l'espressione di D per un sistema di coordinate oblique; e senza difficoltà si otterrebbe:

$$D = \pm \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\varphi} \quad (2)$$

Consideriamo ancora il triangolo che i due punti M ed M' formano coll'origine. Siano r , r' i raggi vettori dei punti M, M'; ed α , α' gli angoli delle loro inclinazioni all'asse delle x ; si avrà:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha' = \frac{x'}{r'}, \quad \sin\alpha' = \frac{y'}{r'}.$$

Or indicando con δ l'angolo formato dai due raggi vettori, si avrà $\pm\delta = \alpha' - \alpha$, ed in conseguenza:

$$\pm \sin\delta = \sin\alpha' \cos\alpha - \cos\alpha' \sin\alpha,$$

o sostituendovi i valori precedenti:

$$\pm rr' \sin\delta = xy' - yx';$$

ma se indichiamo con f la superficie del triangolo OMM', è noto esser $2f = rr' \sin\delta$, quindi:

$$2f = \pm (xy' - yx'), \quad (3)$$

dovendosi dei due segni ritener quello che renderà positiva l'espressione di f .

E se dall'attuale sistema di coordinate, senza mutare la direzione degli assi, si passi ad altro sistema, della cui origine siano $-x''$, $-y''$ le coordinate rispetto ai primi assi, è chiaro che avremo soltanto a sostituire nell'equazione (3) $x - x''$, $y - y''$, $x' - x''$, $y' - y''$ in vece di x , y ; x' , y' per ottenere:

$$2f = y(x'' - x') + y'(x - x'') + y''(x' - x),$$

quale espressione della superficie del triangolo formato dai tre punti x , y ; x' , y' ; x'' , y'' .

CAPO SECONDO.

DELLA LINEA RETTA.

7. Sia HL (*fig. 5*) una linea retta, comunque tirata nel piano degli assi coordinati rettangolari OX, OY; pel punto A, in cui la retta incontra l'asse delle ordinate, si conduca AK paral-

lela ad OX, e pei punti M, M', M'', ... ovunque presi sulla HL, si tirino le ordinate MP, M'P', M''P'', ... I triangoli simili AMQ, AM'Q', AM''Q'', che derivano dalla sola ipotesi di essere i punti M, M', M'', ... in linea retta, ci danno le relazioni

$$\frac{MQ}{AQ} = \frac{M'Q'}{AQ'} = \frac{M''Q''}{AQ''} = \text{ecc.}$$

ossia :

$$\frac{MP-AO}{OP} = \frac{M'P'-AO}{OP'} = \frac{M''P''-AO}{OP''} = \text{ecc.} ;$$

dalle quali risulta che l'ordinata di qualsivoglia punto della retta, diminuita di AO, sta all'ascissa dello stesso punto in una costante ragione.

Laonde indicando con a questa ragione costante, con b la distanza che passa tra l'origine ed il punto d'intersezione della retta coll'asse delle y , e finalmente con x, y le coordinate di qualunque punto della retta, troveremo che per ciascun punto di essa dovrà esser soddisfatta l'equazione :

$$\frac{y-b}{x} = a,$$

donde

$$y = ax + b. \quad (1)$$

E dal modo di deduzione di questa equazione 'chiaro apparisce, come essa debba rimaner soddisfatta dai valori delle coordinate di qualsiasi punto della retta HL, e come questa retta viceversa debba risultare dalla costruzione di quell'equazione. Quindi è che all'equazione (1) si è dato il nome di equazione della retta.

E poichè in essa x ed y disegnano le coordinate di qualsiasi punto della retta, sono perciò da riguardarsi come grandezze variabili, e vengono comunemente denominate coordinate correnti della retta; al contrario a e b sono grandezze costanti, che definiscono la situazione della retta rispetto al sistema degli assi. Ed attesa la necessaria omogeneità dell'equazione (1) dovrà b esser una linea, ed a un numero assoluto. Infatti b rappresenta, come si è già osservato, l'ordinata della retta nell'origine; e dal triangolo AMQ si ottiene :

$$a = \frac{MQ}{AQ} = tg MAQ = tg \alpha,$$

α disegnando l'angolo d'inclinazione della retta HL al semiasse positivo delle x : il coefficiente di x nell'equazione della retta, risolta rispetto ad y , esprime dunque la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta forma coll'asse delle x .

L'equazione (1), poichè la sua deduzione rimane interamente la stessa, regge ancora per coordinate oblique; soltanto è allora (fig. 6):

$$a = \frac{MQ}{AQ} = \frac{\text{sen } MAQ}{\text{sen } AMQ} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen}(\varphi - \alpha)}, \quad (2)$$

φ indicando l'angolo delle coordinate; e rispetto all'angolo α , che la retta forma coll'asse delle ascisse, si avrà

$$\text{tg } \alpha = \frac{a \text{ sen } \varphi}{1 + a \cos \varphi}. \quad (3)$$

Purtuttavia noi supporremo in seguito che le coordinate si riferiscano sempre al sistema rettangolare, purchè espressamente non si avverta il contrario.

8. Poichè le costanti a , b nell'equazione (1) possono avere ogni valore possibile, positivo o negativo, perciò l'equazione (1) sarà idonea a rappresentare una retta, qualunque sia la sua posizione rispetto al sistema degli assi. Se b è negativa, la retta taglia l'asse delle y inferiormente all'origine; se è $b=0$, la retta passa per l'origine, e la sua equazione sarà della forma: $y=ax$, vale a dire che mancherà del termine costante; se a è negativa, la porzione della retta, giacente sopra l'asse delle ascisse, farà con questo un angolo ottuso.

Nell'ipotesi di $a = \text{tg } \alpha = 0$, si avrà ancora $\alpha=0$, e la retta sarà parallela all'asse delle ascisse; l'equazione (1) diverrà $y=b$, e quindi sarà l'equazione di una retta, condotta alla distanza b parallelamente all'asse delle x . Se fosse anche $b=0$, la retta si confonderebbe con questo asse; sarà dunque $y=0$ l'equazione dell'asse medesimo delle ascisse.

Nel triangolo AOB (fig. 5) si ha $AO=BO$. $\text{tg } \alpha$, ed in conseguenza ponendo $BO=-c$, sarà $b=-ac$. Introducendo questo valore nell'equazione (1), essa prenderà la forma:

$$y=ax-ac, \text{ ovvero } x=\frac{y}{a}+c;$$

per $\alpha=90^\circ$, sarà $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, e l'ultima equazione diverrà $x=c$. Sotto questa forma è dedita l'equazione di una retta che alla distanza c è menata parallelamente all'asse dell'ordinate; e se fosse $c=0$, la retta si confonderebbe col detto asse; sarà dunque $x=0$ l'equazione dell'asse delle y .

9. Si invece di a e b si scelgano altre costanti per determinare la posizione della retta, la sua equazione assumerà un'altra forma.

Così una retta è interamente definita mercè i punti A, B , (fig. 5) della sua intersezione cogli assi; e perciò chiamando b e c le distanze di essi punti dall'origine, distanze che saranno positive quando i punti d'intersezione giaceranno sopra i semiasse positivi delle y ed x , avremo per ciascun punto della retta la proporzione

AO: BO=MP: BP, ossia $b:-c=y:x-c$,
dove si avrà, come equazione della retta:

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1. \quad (1)$$

Ed egli è chiaro che questa forma dell'equazione della retta vale per assi obliqui egualmente che rettangolari, e che in entrambi i casi il significato delle costanti b, c rimane lo stesso.

Se dall'origine O (fig. 7) si meni la OD perpendicolare alla retta HL , la posizione di questa retta sarà data mercè la lunghezza della perpendicolare $OD=p$, e l'angolo $DOX=\beta$ che questa farà coll'asse delle x positive. Or essendo M qualsivoglia punto della retta HL ed x, y le sue coordinate, si conduca $MO=r$ e si faccia l'angolo $MOX=\theta$; si avrà $MP=y=r \operatorname{sen} \theta$, $OP=x=r \cos \theta$; e poichè ADL è linea retta, per ogni suo punto avremo che il triangolo ODM sarà rettangolo in D , e quindi $OD=OM \cos \theta$, vale a dire

$$p=r \cos(\beta-\theta)=r \cos \beta \cos \theta + r \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta;$$

dove risulterà dietro la sostituzione dei valori precedenti di $r \cos \theta$ ed $r \operatorname{sen} \theta$:

$$x \cos \beta + y \operatorname{sen} \beta = p \quad (2)$$

per equazione della retta HL , e che prenderà ancora la forma:

$$x \cos \lambda + y \cos \mu = p, \quad (3)$$

λ e μ disegnando gli angoli che p forma cogli assi delle x ed y . Ed osiamo appena ricordare che le equazioni (2) e (3) valgono soltanto pel sistema rettangolare.

Ma comunque l'equazione della retta si trasformi, le rimarrà sempre il suo carattere essenziale, ch'è quello di esser di primo grado rispetto alle coordinate variabili y ed x . Donde poi concludiamo che ogni equazione di primo grado tra due variabili ha per significato geometrico una linea retta.

Ed in vero la forma generale di simili equazioni è:

$$Ay + Bx + C = 0, \quad (4)$$

la quale risolta rispetto ad y , prende la forma

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A},$$

identica all'altra: $y = ax + b$, quando si ponga, $-\frac{B}{A} = a$, $-\frac{C}{A} = b$; ciò che sarà sempre possibile, poichè le costanti a , b dell'equazione (1) sono capaci di valore qualunque.

Se un'equazione contiene una sola variabile, e quindi della forma $f(x) = 0$ o $f(y) = 0$, il suo luogo geometrico (supponendo che possa esser soddisfatta da valori reali di x o y , poichè in contrario nessun significato geometrico potrebbe convenirle) sarà una retta, o un sistema di molte rette rispettivamente parallele all'asse delle ordinate o delle ascisse, secondochè sarà di 1° grado o di grado superiore rispetto alla variabile in essa contenuta.

Quando sia data l'equazione di una retta, potremo costruirla in diverse maniere, di cui più semplice è quella di determinare i suoi punti d'intersezione cogli assi coordinati: e che immediatamente otterremo, se nell'equazione proposta faremo successivamente nulli x ed y .

10. Dalla presenza di due costanti nell'equazione della retta si rileva che si richieggono due condizioni per definirne il sito. Se le costanti son date, sarà data ancora la situazione della retta; e se viceversa son date due condizioni indipendenti, a cui la retta dovrà soddisfare, si potranno determinare le costanti che ad essa convengono.

Problema — Si cerca l'equazione della retta che passi per un dato punto x', y' .

L'equazione richiesta può suppersi della forma:

$$y = ax + b, \quad (\alpha)$$

nella quale a e b designino grandezze indeterminate.

E poichè la retta deve passare pel punto x', y' , le coordinate di questo punto dovranno render soddisfatta l'equazione (α) : avremo così l'equazione di condizione:

$$y' = ax' + b,$$

mercè la quale potrà determinarsi una delle incognite, per esempio b , ed eliminarsi dall'equazione (α) , nel modo più facile, qual'è quello di sottrarre l'ultima equazione da (α) : si avrà così la richiesta equazione:

$$y - y' = a(x - x'). \quad (1)$$

Se in questa si ponga $x = x'$, si avrà $y = y'$ per dimostrazione, che la retta da essa rappresentata passa pel punto x', y' . Essa contiene peranco la costante arbitraria $a = \operatorname{tg} \alpha$; quindi l'angolo α che la retta farà coll'asse delle x , rimane indeterminato, come doveva necessariamente avvenire, essendo infinite le rette che possono passare per un punto dato.

11. Problema. Trovare l'equazione di una retta che passi per due punti dati x', y' ed x'', y'' .

Rappresentiamo ancora con

$$y = ax + b \quad (\alpha)$$

l'equazione della retta; avremo in conseguenza delle condizioni date le due equazioni:

$$y' = ax' + b, \quad (\beta)$$

$$y'' = ax'' + b, \quad (\gamma)$$

mercè le quali si determineranno le due incognite a e b . Sottraendo (β) da (α) e (γ) da (β) , avremo

$$y - y' = a(x - x'), \quad y' - y'' = a(x' - x'');$$

e sostituendo nella 1^a di queste due equazioni il valore di a tolto dalla 2^a, otterremo la richiesta equazione:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x') \quad (1)$$

Se uno dei due punti dati p. e. x'' , y'' diviene origine, sarà $x'' = y'' = 0$; e dall'equazione (1) avremo:

$$y = \frac{y'}{x'} x \quad (2)$$

come equazione di una retta che passa per l'origine e pel punto x' , y' .

Se il punto x''' , y''' debba giacere nella retta rappresentata dall'equazione (1), questa dovrà esser soddisfatta dai valori x''' , y''' ; vale a dire che dovrà essere

$$y''' - y'' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x''' - x')$$

ovvero

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{y' - y''}{x' - x''} \quad (3)$$

Questa equazione esprime dunque la condizione, cui dovranno soddisfare i tre punti x' , y' ; x'' , y'' ; x''' , y''' per essere in linea retta.

Come è facile ad intendersi, le formole di questo e del precedente paragrafo sono indipendenti dall'angolo delle coordinate, e perciò valgono per un sistema qualunque di assi obliqui egualmente che pel rettangolare.

12. Problema. Date le equazioni di due rette, determinare l'angolo sotto cui s'incontrano.

Siano:

$$1). \dots y = ax + b, \quad 2). \dots y = a'x + b$$

le equazioni delle rette date, che supponiamo riferite ad assi rettilinei, e rappresentiamo con (1. 2) l'angolo sotto cui s'incontrano, e con (1. x), (2. x) gli angoli che esse formano coll'asse delle x .

Come chiaramente si vede nella fig. 8, è

$$(1. 2) = (2. x) - (1. x),$$

ovvero

$$(1.2) = 180^\circ - [(2.x) - (1.x)]$$

secondochè (1.2) dinoterà l'angolo acuto, o il suo adiacente ottuso. Quindi sarà

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(1.2) &= \pm \operatorname{tg}[(2.x) - (1.x)] \\ &= \pm \frac{\operatorname{tg}(2.x) - \operatorname{tg}(1.x)}{1 + \operatorname{tg}(1.x)\operatorname{tg}(2.x)}; \end{aligned}$$

ma è $\operatorname{tg}(1.x) = a$, $\operatorname{tg}(2.x) = a'$; sarà dunque

$$\operatorname{tg}(1.2) = \pm \frac{a' - a}{1 + aa'}. \quad (1)$$

Ordinariamente si ritiene il segno superiore, quando sia $a' > a$ e la formola si destini all'espressione dell'angolo acuto.

I risultamenti di questo problema menano alle seguenti importanti conseguenze.

a) Se la rette 1) e 2) sono parallele, sarà l'angolo $(1.2) = 0$ quindi anche $\operatorname{tg}(1.2) = 0$; e l'equazione (1) darà $a' - a = 0$ ossia $a = a'$. L'equazione dunque $a = a'$ esprime la condizione di parallelismo delle rette 1) e 2).

b) Se le rette 1) e 2) sono l'una all'altra perpendicolari, sarà l'angolo $(1.2) = 90^\circ$, con ciò $\operatorname{cotg}(1.2) = \frac{1 + aa'}{a' - a} = 0$, e quindi $1 + aa' = 0$. Laonde: l'equazione $1 + aa' = 0$, ovvero $a' = -\frac{1}{a}$ esprimerà la condizione della perpendicolarità delle rette 1) e 2).

Riferendo l'equazioni delle rette 1) e 2) ad un sistema di coordinate oblique, il cui angolo sia $= \varphi$, si avrà mercè l'equazione (3) del n° 7

$$\operatorname{tg}(1.2) = \frac{(a' - a) \operatorname{sen} \varphi}{1 + aa' + (a + a') \cos \varphi}.$$

In conseguenza la condizione del parallelismo delle due rette rimarrà espressa da $a = a'$, ma quella di stare ad angolo retto sarà data da

$$1 + aa' + (a + a') \cos \varphi = 0.$$

15. Problema. Si cerca l'equazione di una retta che

passi pel punto $x' y'$, e sia parallela alla retta $y = ax + b$.

Rappresentando con

$$y = Ax + B$$

l'equazione della retta richiesta, si avranno le due equazioni di condizione:

$$y' = Ax' + B, \quad A = a;$$

sarà dunque $B = y' - ax'$, e l'equazione richiesta risulterà

$$y - y' = a(x - x').$$

14. Problema. Si cerca l'equazione di una retta che passi pel punto x', y' e sia perpendicolare alla retta $y = ax + b$.

Poichè la retta deve passare pel punto x', y' , la sua equazione dovrà avere la forma $y - y' = A(x - x')$, e dovendo ancora esser perpendicolare alla retta $y = ax + b$, dovrà esser soddisfatta la relazione $aA = -1$, sarà dunque

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

l'equazione richiesta.

15. Problema. Determinare le coordinate del punto d'intersezione delle due rette:

$$1). \dots y = ax + b, \quad 2). \dots y = a'x + b'.$$

È evidente che le coordinate richieste saranno date da quei valori di x ed y che soddisferanno alle equazioni 1) e 2), e che da queste si otterranno quando siano riguardate come coesistenti. In questo modo otterremo

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}, \quad y = \frac{ab' - ba'}{a - a'}.$$

Ponendo $a = a'$, questi due valori diverranno infiniti: risultamento conforme all'ipotesi stabilita, poichè con essa le due rette son date parallele. E se oltre $a = a'$, sia ancora $b = b'$, si avrà $x = y = \frac{0}{0}$, vale a dire indeterminati; ed infatti le

due rette, coincidendo in una, avranno comuni tutti i loro punti.

16. Problema. Data una retta e dato un punto M fuori di essa, si cerca la distanza P del punto dalla retta, ossia la lunghezza della perpendicolare abbassata dal punto M sulla retta.

Siano :

$$1) \dots y = ax + b$$

l'equazione della retta data ed x' , y' le coordinate del punto M; sarà :

$$2) \dots y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

l'equazione della perpendicolare menata dal punto x' , y' alla retta 1). Siano inoltre x'' , y'' le coordinate del punto d'intersezione; sarà (n° 6)

$$P = \pm \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

E poichè le coordinate x'' , y'' debbono soddisfare alle equazioni 1) e 2), avremo

$$y'' = ax'' + b, \quad y'' - y' = -\frac{1}{a}(x'' - x'),$$

da cui facilmente otterremo

$$x'' - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2}, \quad y'' - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}.$$

Con questi valori avremo in fine :

$$P = \pm \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Dei due segni bisognerà ritener quello che renderà P positiva, imperocchè di una distanza non si considera ordinariamente che il suo valore assoluto. Del resto il numeratore $y' - (ax' + b)$ sarà positivo o negativo, essendochè y' , ordinata dal punto dato, sarà maggiore o minore dell'ordinata $ax' + b$, che nella retta corrisponde all'ascissa x' dello stesso punto; o in altri termini, secondochè il punto M starà sopra o sotto della retta data. Con-

siderando che $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ rappresenta il coseno dell'angolo d'inclinazione della retta all'asse delle x , si avrà dalla precedente espressione di P la regola che segue:

Si avrà la distanza di un dato punto x', y' da una retta data, moltiplicando il coseno dell'angolo sotto cui essa s'inclina all'asse delle x , pel valore che nell'ipotesi di $x=x'$ assumerà il 1° membro della sua equazione, ridotta alla forma $y-ax-b=0$.

17. Problema. Trovare l'equazione di una retta che passa pel punto d'intersezione di due rette date.

Siano:

$$1) \dots y = ax + b, \quad 2) \dots y = a'x + b'$$

le equazioni delle rette date. In vece (n° 15) di cercare le coordinate del punto d'intersezione, e quindi condurvi una retta, si potrà procedere più brevemente nel modo che segue.

Si scrivano le equazioni precedenti sotto la forma:

$$(1) y - ax - b = 0, \quad (2) y - a'x - b' = 0;$$

si moltiplichi una di esse, e sia la prima, per una costante arbitraria m ; indi si addizioni all'altra, e si avrà:

$$(y - ax - b)m + y - a'x - b' = 0, \quad (3)$$

e questa sarà l'equazione richiesta, imperocchè essa, essendo di primo grado rispetto ad x ed y , appartiene ad una retta, ed è chiaro che risulterà identica pei medesimi valori di x ed y che renderanno soddisfatte le equazioni delle due rette date (1) e (2) *. Risolvendola rispetto ad y si avrà:

$$y = \frac{am + a'}{m + 1} x + \frac{bm + b'}{m + 1}. \quad (4)$$

* Si vede chiaramente che questo metodo può ricevere una più generale applicazione. Siano $f(x, y) = 0 \dots (\alpha)$ e $F(x, y) = 0 \dots (\beta)$ le equazioni di due curve, e si formi una nuova equazione, $\varphi(x, y) = 0 \dots (\gamma)$, la quale risulti identica pei valori di x ed y che renderanno soddisfatte le equazioni (α) e (β) : le tre curve (α) , (β) e (γ) si taglieranno in uno o più punti comuni. Un'equazione di questa specie sarebbe p. e. $\varphi(x, y) = f(x, y) + F(x, y) = 0$, o più generalmente $\varphi(x, y) = mF(x, y) + n f(x, y) = 0$, in cui m ed n dinotano due costanti arbitrarie.

Essa contiene ancora una costante indeterminata m , giacchè realmente vi sono infinite rette che soddisfano alla condizione del problema; e perciò vi aggiungeremo ancora la condizione, che la retta (3) bisechi l'angolo formato dalle rette date (1) e (2).

Indichiamo con α , α' ed u gli angoli d'inclinazione delle rette (1), (2) e (3) all'asse delle x , e con v l'angolo delle rette (1) e (2); dall'equazione (4) segue immediatamente:

$$tgu = \frac{am + \alpha'}{m + 1}, \quad (\lambda)$$

da cui si dedurrà m , tostochè sarà noto u . E poichè la retta (3) deve bisecare l'angolo v , dovrà essere $u = \frac{v}{2} + \alpha$, e con ciò $tg2u = tg(v + 2\alpha)$; donde per una nota formola trigonometrica si avrà:

$$\frac{2tgu}{1 - tg^2u} = \frac{tgv + tg2\alpha}{1 - tgv \cdot tg2\alpha} = \frac{\alpha + \alpha'}{1 - \alpha\alpha'};$$

quando a tgv e $tg2\alpha$ avremo sostituito i valori:

$$tgv = \frac{\alpha' - \alpha}{1 + \alpha\alpha'}, \quad tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2}.$$

Ed ordinando la precedente equazione si ottiene:

$$tg^2u - 2 \frac{\alpha\alpha' - 1}{\alpha + \alpha'} tgu - 1 = 0. \quad (\mu)$$

Or essendovi per tgu due valori, e quindi ancora per m mercè l'equazione (λ), vi saranno due rette le quali, passando pel punto d'intersezione di (1) e (2), divideranno per metà l'angolo della loro inclinazione; come doveva necessariamente avvenire, essendovi due di questi angoli, cioè v e $180^\circ - v$. Siano inoltre $tg u_1$ e $tg u_2$ le radici dell'equazione (μ); per un noto teorema della teoria delle equazioni sarà:

$$tg u_1 \cdot tg u_2 = -1, \text{ ossia } 1 + tg u_1 \cdot tg u_2 = 0,$$

donde risulta che le due bisecanti stanno ad angolo retto.

Risolvendo l'equazione (μ) si trova:

$$m = - \frac{\alpha\alpha' - 1 \pm \sqrt{(1 + \alpha^2)(1 + \alpha'^2)}}{\alpha + \alpha'},$$

valori, che sostituiti in (λ), ci danno:

$$m = - \frac{1 + a^n \mp \sqrt{(1 + a^n)(1 + a^n)}}{1 + a^n \mp \sqrt{(1 + a^n)(1 + a^n)}} \\ = \pm \sqrt{\frac{1 + a^n}{1 + a^n}} = \pm \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'}.$$

Introducendo in fine questa espressione del valore di m nell'equazione (3), si avrà:

$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \pm \frac{y - a'x - b'}{\sqrt{1 + a'^2}}, \quad (5)$$

per equazione della retta che passa pel punto d'intersezione di (1) e (2), e biseca l'angolo da esse formato.

Del resto, considerando che ogni punto della bisecante dell'angolo formato da (1) e (2) deve da esse egualmente distare, si poteva comporre immediatamente l'equazione (5) mercè la regola data in fine del n° precedente.

18. Problema. Dato l'angolo $XOL = \alpha$ (fig. 9), si cerca un punto M , le cui distanze dai lati dell'angolo siano nella ragione di m ad n .

Prendendo il lato OX per asse delle ascisse ed il vertice O per origine, l'equazione dell'altro lato OL sarà:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha = ax,$$

Indichiamo con ξ , η le coordinate del punto M , sarà $MP = \eta$,

$$MQ = \pm \frac{\eta - a\xi}{\sqrt{1 + a^2}} \quad (\text{n° 16}); \text{ quindi conformemente all'enunciato}$$

del problema avremo:

$$MP : MQ = m : n,$$

ossia

$$\eta : \pm \frac{\eta - a\xi}{\sqrt{1 + a^2}} = m : n,$$

donde

$$\eta = \frac{am}{m \pm n \sqrt{1 + a^2}} \xi.$$

Or non avendo ottenuto per la determinazione di η e ξ che una

sola equazione, il cui luogo geometrico (a cagione del doppio segno nel denominatore) è dato da due rette che s'intersecano nell'origine, è chiaro che tutti i punti di queste rette soddisfaranno il problema.

19. Problema. Movendosi la retta HK in modo da restare costantemente parallela al lato BC del triangolo ABC (fig. 10), s'intendano congiunti i punti D, E in cui essa taglia i lati AB ed AC, coi vertici degli angoli opposti C e B; queste due congiungenti intersecandosi in un punto G, si cerca il luogo geometrico di questo punto, ossia la linea su cui giaceranno tutti i punti d'intersezione G, mentre la retta HK si muove parallelamente a BC.

Prendiamo il vertice A per origine, ed i lati AB, AC per assi delle x ed y , e così avremo in generale a far uso di coordinate oblique. Poniamo $AB = c$, $AC = b$; sarà:

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{c} - 1 = 0 \quad (p)$$

l'equazione della retta BC. Dinotando AD con ξ , l'equazione della retta HK sarà:

$$y = m(x - \xi);$$

e poichè essa dev'essere parallela a BC, si avrà $m = -\frac{b}{c}$; quindi l'equazione della HK diverrà:

$$y = -\frac{b}{c}(x - \xi).$$

Ponendo in questa equazione $x = 0$, ne risulta $y = \frac{b\xi}{c} = AE$. Perciò si ha per

$$\text{equazione di CD : } \frac{y}{b} + \frac{x}{c} - 1 = 0, \quad (q)$$

$$\text{— di BE : } \frac{cy}{b\xi} + \frac{x}{c} - 1 = 0. \quad (r)$$

Or considerando queste due equazioni come coesistenti, esse apparterranno al punto d'intersezione G, le cui coordinate si otterranno mercè la successiva eliminazione di x ed y , e saran-

no espresse in funzione di ξ , come dev'essere; giacchè le coordinate di un determinato punto d'intersezione dipendono dal valore di ξ . Se all'opposto si elimini ξ , vale a dire quella grandezza per la quale un determinato punto d'intersezione viene individualizzato, si avrà un'equazione tra x ed y , ossia tra le coordinate di tutti i punti d'intersezione, e che perciò sarà l'equazione richiesta del luogo geometrico di essi punti.

Sottraendo l'equazione (r) dall'equazione (q) si ottiene:

$$\frac{y}{b} \left(1 - \frac{c}{\xi}\right) + x \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{c}\right) = 0,$$

ovvero

$$\frac{y}{b} \left(1 - \frac{c}{\xi}\right) - \frac{x}{c} \left(1 - \frac{c}{\xi}\right) = 0;$$

e sopprimendo in quest'ultima il factor comune $1 - \frac{c}{\xi}$ si ha in fine:

$$y = \frac{b}{c} x, \quad (s)$$

che sarà l'equazione del luogo geometrico richiesto: questo luogo è dunque una retta che passa per l'origine, e biseca il lato opposto BC. Imperocchè dal sistema delle equazioni (p) ed (s) si hanno per coordinate del punto d'intersezione I, $x = \frac{c}{2}$, $y = \frac{b}{2}$; quindi $BI = CI$.

Se alla retta mobile si faccia prendere tale posizione da rendere $AD = DB$, sarà ancora $AE = EC$; donde si deduce immediatamente il noto teorema geometrico: Le tre congiungenti i vertici di un triangolo coi punti medii dei lati opposti, s'intersecano in un medesimo punto.

Rispetto a questo caso avremo $AD = \frac{c}{2}$, $AE = \frac{b}{2}$; quindi le equazioni delle due rette CD e BE diverranno ordinatamente

$$\frac{y}{b} + \frac{2x}{c} = 1, \quad \frac{2y}{b} + \frac{x}{c} = 1,$$

le quali danno $x = \frac{c}{3}$, $y = \frac{b}{3}$ come coordinate del punto d'intersezione G; ma poichè $\frac{1}{2}c$ è l'ascisse del punto I si avrà

$$AG : AI = 2 : 3, \text{ ovvero } AG : GI = 2 : 1.$$

Dunque : il punto d'intersezione delle congiungenti i vertici del triangolo coi punti medii dei lati opposti, divide quelle linee nella ragione di 2 : 1 ; come è già noto dagli Elementi. Questo punto d'intersezione è il centro di gravità del triangolo.

CAPO TERZO.

DEL CERCHIO.

20. È noto esser il cerchio quella linea curva, tutti i punti della quale sono egualmente distanti da un punto fisso, il centro del cerchio.

Ciò posto, indichiamo con α , β le coordinate rettangolari del centro, e con x , y quelle di un punto qualunque della circonferenza ; la loro distanza sarà espressa da :

$$\sqrt{(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2} ;$$

e poichè conformemente alla menzionata proprietà questa distanza dev'esser costante, così indicandola con r , raggio del cerchio, avremo l'equazione :

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2 ; \quad (1)$$

la quale valendo per tutti i punti della circonferenza e per essi soltanto, costituisce l'equazione del cerchio.

L'equazione (1) è l'equazione del cerchio nella sua forma più generale ; ma essa diviene più o meno semplice, dando agli assi una determinata posizione rispetto al cerchio.

1) Se il centro cade nell'origine, l'equazione (1), essendo $\alpha = \beta = 0$, diverrà :

$$y^2 + x^2 = r^2 , \quad (2)$$

la così detta equazione al centro del cerchio.

2) Se l'origine coincide con un'estremità del diametro, e questo col semiasse positivo delle x , sarà $\alpha = r$, $\beta = 0$, ed avremo pel cerchio l'equazione :

$$y^2 + x^2 - 2rx = 0. \quad (3)$$

3) Sia l'origine sulla circonferenza, la sua distanza dal centro sarà eguale al raggio; quindi $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, e con ciò l'equazione (1) si trasforma in:

$$y^2 + x^2 - 2\beta y - 2\alpha x = 0. \quad (4)$$

Dall'equazione (1), svolgendone i quadrati, si ottiene:

$$y^2 + x^2 - 2\beta y - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0, \quad (5)$$

dalla quale, come equazione del cerchio sotto la forma più generale, si deducono le proprietà caratteristiche di esso. Poniamo data un'equazione di secondo grado tra le variabili x ed y , nella quale i quadrati di x ed y abbiano coefficienti $= 1$, o in generale coefficienti eguali, e che manchi il termine contenente il prodotto xy ; il luogo geometrico di questa equazione della forma:

$$y^2 + x^2 + Dy + Ex + F = 0, \quad (6)$$

sarà la circonferenza di un cerchio. In fatti le equazioni (5) e (6) divengono identiche, ponendovi

$$D = -2\beta, E = -2\alpha, F = \alpha^2 + \beta^2 - r^2;$$

donde:

$$\alpha = -\frac{1}{2}E, \beta = -\frac{1}{2}D, r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}.$$

Con ciò son dati il centro ed il raggio del cerchio rappresentato dall'equazione (6), ed in conseguenza è dato lo stesso cerchio.

Dalla precedente espressione del raggio è chiaro che nel caso speciale di $D^2 + E^2 = 4F$, l'equazione (6) significa un punto (cerchio di raggio $= 0$) le cui coordinate sono $x = -\frac{1}{2}E$, $y = -\frac{1}{2}D$. In fatti egli è chiaro che in questo caso l'equazione (6) può ridursi alla forma:

$$(y + \frac{1}{2}D)^2 + (x + \frac{1}{2}E)^2 = 0,$$

la quale, scomponendosi nelle due,

$$y + \frac{1}{2}D = 0, \quad x + \frac{1}{2}E = 0,$$

indica un punto le cui coordinate sono

$$x = -\frac{1}{2} E, \quad y = -\frac{1}{2} D.$$

In fine l'equazione (6) non avrà verun significato geometrico nell'ipotesi di $D^2 + E^2 < 4F$, poichè l'espressione del raggio diviene allora immaginaria. Ed in questo caso, come è facile a trovarsi, per ogni valore di x l'equazione (6) darà un valore immaginario per y .

21. Dall'equazione al centro del cerchio:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

risultano

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \dots (\alpha), \quad x = \pm \sqrt{r^2 - y^2} \dots (\beta)$$

quindi per $x=0$, sarà $y = \pm r$; e per $y=0$, sarà $x = \pm r$. Vale a dire che la circonferenza taglierà i due assi in due punti: A, B e C, D (*fig. 11*), i quali stanno in eguali distanze dall'origine e da un lato e l'altro della stessa. L'equazione (α) dimostra ancora che ad ogni valore di $x < r$ appartengono due valori di y , necessariamente eguali e di segno contrario; e da ciò segue che l'asse delle x taglia il cerchio in due parti congruenti: altrettanto vale per l'asse delle ordinate, come chiaramente si rileva dall'equazione (β), ed in generale per ogni retta menata pel centro, imperocchè l'equazione (1) non cangerà forma, qualunque retta menata pel centro si tolga ad asse delle x . Il cerchio è dunque una curva chiusa, della cui forma potremo farci una chiara idea discutendo la sua equazione. E tralasciando la deduzione delle note proprietà essenziali del cerchio dalla sua equazione, ci limiteremo soltanto, a modo di esempio, al seguente problema.

22. Problema. Dati due punti A e B, si cerca terzo punto, tale che le sue congiungenti con A e B facciano un dato angolo γ .

Conduciamo l'asse delle ascisse (*fig. 12*) pei punti dati, e poniamo l'origine nel punto medio O della $AB = 2a$: indicando con ξ , η le coordinate del punto richiesto M, saranno:

$$y = -\frac{\eta}{a-\xi} (x-a), \quad y = \frac{\eta}{a+\xi} (x+a)$$

le equazioni delle rette AM e BM; ed in conseguenza, conformemente alla condizione del problema, sarà

$$19\gamma = \frac{\frac{\gamma}{a-\xi} - \frac{\gamma_1}{a+\xi}}{1 - \frac{\gamma}{a+\xi} \cdot \frac{\gamma}{a-\xi}}.$$

Or non avendo che questa sola equazione per determinare le incognite ξ , γ il problema sarà indeterminato, ed ogni punto le cui coordinate renderanno soddisfatta l'ultima equazione, ne darà una soluzione. Facendone sparire i fratti, essa equazione prenderà la forma:

$$\gamma^2 + \xi^2 - 2a \cot \gamma \cdot \gamma - a^2 = 0, \quad (m)$$

nella quale si riconosce l'equazione di un cerchio, che passa pei punti A e B, poichè per $\gamma = 0$, si ha $\xi = \pm a$; ha il raggio $= a \operatorname{cosec} \gamma$; e sono coordinate del suo centro $a=0$, $\beta = a \cot \gamma$.

Questo cerchio si costruisce facilmente. Si faccia l'angolo $OAD = \gamma$, e dal punto A si elevi alla AD una perpendicolare la quale incontrerà l'altra, elevata sulla AB dal punto medio O, nel centro richiesto C; sarà così determinato ancora il raggio $CA = CB$: E mercè questa costruzione si avrà $OC = DA \cot \gamma = a \cot \gamma = \beta$, ed $AC = OA$; $\operatorname{sen} \gamma = a \operatorname{cosec} \gamma = r$.

Dall'espressione di β poi segue che il centro giacerà superiormente, inferiormente o nell'asse medesimo delle ascisse, secondochè sarà

$$\gamma < 90^\circ, > 90^\circ \text{ ovvero } = 90^\circ;$$

nel qual ultimo caso AB sarà diametro. Ne risulta inoltre che dei due angoli AMB, AM'B costruiti sulla corda AB nei due segmenti di cerchio, l'uno sarà acuto, l'altro ottuso, ed in fine, restando invariata l'equazione (m), se nel tempo stesso vi si pongano $-\gamma$ e $180^\circ - \gamma$ in vece di γ e γ , dovrà essere $\operatorname{ang. AMB} + \operatorname{ang. AM'B} = 180^\circ$.

Riunendo tutto ciò, si è condotto ai seguenti teoremi:

- 1) Tutti gli angoli iscritti nel medesimo segmento di cerchio, sono eguali tra loro.
- 2) Ogni angolo iscritto nel semicerchio, è retto.
- 3) In ogni quadrilatero, iscritto in un cerchio, la somma degli angoli opposti è $= 180^\circ$.

23. Poichè l'equazione generale del cerchio, (1) ovvero (6) [n° 20] contiene tre costanti, saranno necessarie e sufficienti tre condizioni per determinare interamente la grandezza e posizione di un cerchio. Tra i diversi problemi che qui si presentano, vogliamo esaminare il seguente:

Trovare l'equazione del cerchio che passa per tre punti dati.

Siano $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ le coordinate dei punti dati; l'equazione del cerchio domandato ha la forma:

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2, \quad (1)$$

di cui le tre costanti incognite α, β, r sono da determinarsi in modo che il cerchio passi per i tre punti dati.

E dovendo questi punti trovarsi sulla circonferenza del cerchio (1), le loro coordinate dovranno render soddisfatta l'equazione (1); quindi si avranno le seguenti tre equazioni di condizione:

$$\left. \begin{aligned} (y_1 - \beta)^2 + (x_1 - \alpha)^2 &= r^2 \\ (y_2 - \beta)^2 + (x_2 - \alpha)^2 &= r^2 \\ (y_3 - \beta)^2 + (x_3 - \alpha)^2 &= r^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

le quali bastano per la determinazione delle tre incognite α, β, r . Svolgendo i quadrati, e sottraendo la 2ª e 3ª equazione dalla 1ª, si ha:

$$2(y_1 - y_2)\beta + 2(x_1 - x_2)\alpha - (y_1^2 - y_2^2) - (x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (3)$$

$$2(y_1 - y_3)\beta + 2(x_1 - x_3)\alpha - (y_1^2 - y_3^2) - (x_1^2 - x_3^2) = 0, \quad (4)$$

dalle quali equazioni, come quelle che sono di primo grado rispetto ad α e β , si avranno facilmente i valori di queste coordinate del centro. E poichè le espressioni ne sono abbastanza svolte e non offrono ulteriore interesse, noi passiamo a dedurre una costruzione del problema dai risultamenti finora ottenuti.

Sono coordinate del centro quei valori di α e β che renderanno nel tempo stesso soddisfatte le equazioni (3) e (4). Or considerando per un istante α e β come variabili (correnti) coordinate, le equazioni (3) e (4) che sono di primo grado rispetto ad α e β , avranno ciascuna per luogo geometrico una retta; e l'intersezione di queste due linee darà il centro richiesto, essendo questo il solo punto, le cui coordinate potranno nel tem-

po stesso render soddisfatte le equazioni (3) e (4). Dividendo per $2(y_1 - y_2)$ l'equazione (3), questa si ridurrà alla forma:

$$\beta - \frac{y_1 + y_2}{2} = - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \left(\alpha - \frac{x_1 + x_2}{2} \right), \quad (3')$$

dalla quale si rileva che questa retta passa pel punto, le cui coordinate sono $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ e $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, vale a dire pel punto medio della congiungente i punti x_1, y_1 ed x_2, y_2 . E poichè questa congiungente ha per equazione:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1),$$

ne segue che la retta (3) ovvero (3') sarà ad essa congiungente perpendicolare nel suo punto medio. Similmente si troverà che il luogo geometrico dell'equazione (4) è una retta, perpendicolare nel punto medio della congiungente i punti x_1, y_1 ed x_2, y_2 . Il punto d'intersezione di queste due perpendicolari, di facilissima costruzione, sarà il centro richiesto.

Egli è chiaro che la soluzione analitica del problema mena alla stessa costruzione, già insegnata negli Elementi. Del resto le formole precedenti diverranno più semplici, se l'origine sia posta in uno dei punti dati, p. e. x_1, y_1 , e l'asse delle x si faccia passare per uno degli altri due, x_2, y_2 , poichè in questo caso sarà

$$x_1 = y_1 = y_2 = 0.$$

Da questo problema si scorge il grande vantaggio che può trarsi dall'uso dei luoghi geometrici nella soluzione dei problemi determinati. Trattandosi di determinare un punto mercè alcune date condizioni, queste, nel caso che il problema sia determinato, condurranno sempre a due equazioni, $F(x, y) = 0$, $f(x, y) = 0$ tra le coordinate x, y del punto richiesto, le quali si otterranno per mezzo di eliminazione da queste equazioni. L'eliminazione purtuttavia è non di rado molto lunga, e conduce allora ad espressioni complicate, difficili ad esser trattate. Ma se si consideri che le coordinate del punto richiesto debbono contemporaneamente soddisfare alle due equazioni, si comprenderà subito che quel punto dovrà stare nell'intersezione delle due linee rappresentate da quelle equazioni, quando in esse si riguardino x

ed y quali coordinate variabili, e che dalla loro costruzione risulterà il punto dimandato.

Quando poi il problema è indeterminato, non si avrà tra le coordinate del punto richiesto che una sola equazione, il cui luogo geometrico sarà una linea retta o curva, di cui tutti i punti soddisferanno al problema. Esempii corrispondenti si sono avuti nei n° 18, 19, 22.

Congiunzione del cerchio colla retta.

24. Date le equazioni di un cerchio e di una retta

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \quad (1), \quad y = ax + b \quad (2),$$

cerchiamo le coordinate dei loro punti d'intersezione. Di queste avremo i valori, se considerando le due equazioni come coesistenti, determineremo x ed y per mezzo di eliminazione. Così avremo :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\alpha + a\beta - ab \pm \sqrt{(1 + a^2)r^2 - (a\alpha + b - \beta)^2}}{1 + a^2} \\ y &= \frac{a\alpha + a^2\beta + b \pm a\sqrt{(1 + a^2)r^2 - (a\alpha + b - \beta)^2}}{1 + a^2} \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Or qui possono avvenire tre casi :

1) L'espressione sotto il segno radicale può esser negativa ; allora x e y divengono immaginarie ; e la retta non incontra il cerchio. Ciò avrà luogo, quando sia $(a\alpha + b - \beta)^2 > (1 + a^2)r^2$ ovvero :

$$\pm \frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}} > r,$$

vale a dire che la distanza della retta dal centro è maggiore del raggio (n° 16).

2) Se la detta espressione è positiva, la retta incontrerà il cerchio ed in due punti atteso il doppio segno che precede il radicale ; in questo caso la retta dicesi secante del cerchio.

3) Se la quantità sottoposta al segno radicale è $= 0$, la retta avrà col cerchio un solo punto di comune, le cui coordinate saranno :

$$\xi = \frac{\alpha + a\beta - ab}{1 + a^2}, \quad \eta = \frac{a\alpha + a^2\beta + b}{1 + a^2} \quad (3)$$

ed in questo caso la retta si dirà tangente al cerchio nel punto ξ, η .

La condizione che la retta (2) sia tangente al cerchio (1), sarà dunque espressa dall'equazione:

$$(2) \quad \pm \frac{\beta - \alpha x - b}{\sqrt{1 + a^2}} = r; \quad (4)$$

valè a dire che la perpendicolare, menata dal centro sulla retta, dovrà esser eguale al raggio; donde poi segue, che la tangente è perpendicolare al raggio menato al punto di contatto.

Determinando a e b per mezzo delle equazioni (3), otterremo:

$$a = -\frac{\xi - \alpha}{\eta - \beta}, \quad b = \eta + \frac{\xi(\xi - \alpha)}{\xi - \beta},$$

come valori che dovranno avere le costanti a e b ; affinchè la retta sia tangente al cerchio nel punto ξ, η . Quindi se queste espressioni s'introducono nell'equazione (2), si avrà:

$$y = -\frac{\xi - \alpha}{\eta - \beta} x + \eta + \frac{\xi(\xi - \alpha)}{\eta - \beta},$$

ovvero

$$y - \eta = -\frac{\xi - \alpha}{\eta - \beta} (x - \xi) \quad (5)$$

come equazione della tangente al cerchio nel punto ξ, η , a cui appartiene propriamente anche l'equazione:

$$(\eta - \beta)^2 + (\xi - \alpha)^2 = r^2,$$

la quale esprime che il punto ξ, η sta sulla circonferenza. Aggiungendo quest'ultima equazione alla (5), già ridotta alla forma:

$$(y - \eta)(\eta - \beta) + (x - \xi)(\xi - \alpha) = 0,$$

si avrà l'equazione della tangente sotto la forma:

$$(y - \beta)(\eta - \beta) + (x - \alpha)(\xi - \alpha) = r^2, \quad (6)$$

la quale differisce dall'equazione (1) del cerchio, sol perchè i rettangoli $(y - \beta)(\eta - \beta)$ ed $(x - \alpha)(\xi - \alpha)$ stanno invece dei quadrati $(y - \beta)^2$ ed $(x - \alpha)^2$.

Se l'origine delle coordinate coincide col centro del cerchio,

l'equazione della tangente, come chiaramente si rileverà dalle equazioni (5) e (6) ponendovi $\alpha = \beta = 0$, diverrà:

$$y - \gamma = -\frac{\xi}{\gamma}(x - \xi) \quad (7)$$

ovvero:

$$y\gamma + x\xi = r^2 \quad (8)$$

23. Consideriamo ancora una secante, menata per un dato punto A nel piano del cerchio. Poniamo che l'origine sia nel centro del cerchio, e che l'asse delle x passi pel punto A; chiamando d la distanza di questo punto dal centro ed r il raggio, le equazioni del cerchio e della secante saranno:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad y = a(x - d).$$

Ponendo $\alpha = \beta = 0$ e $b = -ad$ nelle equazioni (k) del n° precedente, avremo le coordinate dei due punti d'intersezione B_1 e B_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a^2 d + N}{1 + a^2}, & y_1 &= \frac{-ad + aN}{1 + a^2}, \\ x_2 &= \frac{a^2 d - N}{1 + a^2}, & y_2 &= \frac{-ad - aN}{1 + a^2}, \end{aligned}$$

nelle quali per brevità si è fatto $N = \sqrt{(1 + a^2) r^2 - a^2 d^2}$. In fine chiamando e_1 ed e_2 le distanze AB_1 ed AB_2 del punto A dai due punti d'intersezione, si avrà:

$$e_1^2 = (d - x_1)^2 + y_1^2, \quad e_2^2 = (d - x_2)^2 + y_2^2.$$

E se in queste equazioni s'introducano i valori delle coordinate, qui sopra trovati, si otterrà:

$$e_1 = \pm \frac{d - N}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad e_2 = \frac{d + N}{1 + a^2};$$

quindi

$$e_1 e_2 = \pm \frac{d^2 - N^2}{1 + a^2},$$

ossia, restituendovi il valore di N ,

$$e_1 e_2 = \pm (d^2 - r^2).$$

Nella quale espressione è da prendersi quello dei due segni che

renderà positivi e , ed il prodotto e, e_a ; quindi il superiore o l'inferiore, secondochè il punto giacerà fuori o dentro del cerchio. E poichè per l'ultima equazione il prodotto e, e_a è indipendente da a , vale a dire dalla direzione della secante (o corda, se il punto è dentro del cerchio), così ne segue il seguente teorema:

Per un dato punto A , la cui distanza dal centro di un dato cerchio sia $= d$, conducendo una secante o corda, il prodotto delle distanze, che dal punto A avranno i due punti d'intersezione di quella secante o corda col cerchio, sarà una quantità costante, ed eguale alla differenza dei quadrati della distanza d e del raggio.

Il prodotto $e, e_a = \pm (d^2 - r^2)$ dicesi potenza del punto A rispetto al detto cerchio.

E poichè questo teorema deve reggere, comunque i due punti d'intersezione della secante siano vicini tra essi, così lo stesso teorema dovrà aver luogo ancora per la tangente al cerchio condotta pel punto A , rispetto alla quale sarà $e, e_a = t$, indicando con t la porzione di tangente, compresa tra il punto A e quello di contatto. Si avrà così l'equazione $t^2 = d^2 - r^2$, dalla quale risulta di nuovo che la tangente è perpendicolare al raggio menato al punto di contatto. Dovendo inoltre esser $e, e_a = d^2 - r^2$ per una secante comunque condotta pel punto A , sarà $t^2 = e, e_a$; equazione in cui sta espresso il teorema che la tangente t menata ad un cerchio per qualsivoglia punto A , è media proporzionale geometrica tra i due segmenti di qualsiasi secante condotta per lo stesso punto.

26. Nel n° 24 abbiamo svolta l'equazione della tangente al cerchio nell'ipotesi che sia dato il punto di contatto ξ, η : supponiamo ora che per un punto x', y' esteriore al cerchio:

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2$$

si debba a questo menare una tangente.

Indicando tuttavia con ξ, η le coordinate sebbene incognite del punto di contatto, avremo per equazione della tangente al cerchio nel punto ξ, η (n° 24):

$$(y - \beta)(\eta - \beta) + (x - \alpha)(\xi - \alpha) = r^2.$$

E poichè questa tangente deve passare pel punto $x' y'$, si avrà l'equazione di condizione:

$$(y' - \beta)(\gamma - \beta) + (x' - \alpha)(\xi - \alpha) = r^2, \quad (m)$$

che congiunta all'altra:

$$(\gamma - \beta)^2 + (\xi - \alpha)^2 = r^2, \quad (n)$$

ci darà i valori richiesti di ξ ed γ .

Considerando come incognite $\xi - \alpha$ ed $\gamma - \beta$, e ponendo per brevità le quantità note:

$$x' - \alpha = p, \quad y' - \beta = q, \quad (x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = d^2,$$

d indicando la distanza del punto x', y' dal centro del cerchio, avremo mercè successiva eliminazione:

$$\left. \begin{aligned} \xi - \alpha &= \frac{r^2 p \pm r q \sqrt{d^2 - r^2}}{d^2} \\ \gamma - \beta &= \frac{r^2 q \mp r p \sqrt{d^2 - r^2}}{d^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Donde si rileva che dal punto x', y' si potranno menare due tangenti, una sola, o infine nessuna, secondochè sarà $d > r$, $=$ ovvero $< r$, vale a dire secondo che il punto x', y' giacerà fuori della circonferenza, sulla circonferenza o dentro di essa.

Ed in fine si avrà per l'angolo d'inclinazione τ della tangente all'asse delle ascisse:

$$\operatorname{tg} \tau = - \frac{\xi - \alpha}{\gamma - \beta} = - \frac{pq \pm r \sqrt{d^2 - r^2}}{r^2 - p^2}.$$

27. Rimane ancora a dedurre dall'analisi precedente un metodo per la costruzione geometrica dei punti di contatto. Le espressioni (2), che si presentano immediatamente a questo obbietto; essendo alquanto intricate noi faremo uso dei luoghi geometrici. Or le coordinate dei punti di contatto sono quei valori di ξ, γ che renderanno soddisfatte nel tempo stesso le equazioni (m) ed (n) e perciò quei punti giaceranno nell'intersezione dei luoghi geometrici rappresentati dalle dette equazioni, quando in esse riguarderemo ξ, γ come coordinate correnti.

E poichè la costruzione deve dipendere dalla sola natura del problema, e non dal sito del sistema di coordinate adoperato

nell'analisi, così noi riporremo l'origine nel centro (*fig. 13*), e con ciò sarà $\alpha = \beta = 0$, e le equazioni da costruirsi (*m*) ed (*n*) prenderanno la seguente forma:

$$y'\eta + x'\xi = r^2 \dots (m'), \quad \eta^2 + \xi^2 = r^2 \dots (n')$$

Il luogo dell'equazione (*n'*) è lo stesso cerchio dato; quello di (*m'*) è una retta, che facilmente costruiremo mercè i suoi punti d'intersezione cogli assi. Or dall'equazione (*m'*) segue:

$$\text{per } \eta = 0: \xi = OD = \frac{r^2}{x'}, \text{ e per } \xi = 0: \eta = OE = \frac{r^2}{y'};$$

costruendo dunque in ordine ad x' ed r , egualmente che in ordine ad y' ed r , le terze proporzionali OD ed OE, si avranno i punti D ed E: la retta LL', condotta per questi punti, sarà il luogo dell'equazione (*m'*), ed i suoi punti d'intersezione G, G' col cerchio, saranno i richiesti punti di contatto.

La retta LL', che passa pei due punti di contatto delle tangenti da M menate al cerchio, e che ha per equazione (*m'*), dicesi corda dei contatti.

Dall'ottenuta espressione di OD si scorge che il sito del punto D è indipendente dall'ordinata y' del punto M; donde segue che se da qualsiasi punto della NN', menata pel punto M perpendicolarmente alla OX, si conducano delle tangenti al cerchio, tutte le corde dei contatti s'intersecheranno in un medesimo punto D.

Or essendo arbitraria la direzione dell'ascisse rispetto al cerchio, e questo asse potendo in conseguenza esser perpendicolare a qualsiasi retta condotta pel punto M, ne segue il seguente teorema:

Conducendo da punti qualunque di una retta NN' delle tangenti ad un cerchio, e congiungendo i punti di contatto delle rispettive coppie di tangenti con delle corde, queste s'intersecheranno tutte in un medesimo punto D, che giacerà sulla perpendicolare menata dal centro alla retta NN'.

Il punto D si nomina polo rispetto alla retta NN', la quale dal canto suo si dice polare in riguardo al punto D.

Dall'espressione di OD segue che ponendo $x' = OP > r$, sarà $OD < r$, e viceversa; vale a dire che se la polare giace fuori

del cerchio, il polo starà dentro; ma se la polare taglia il cerchio, il polo ne starà fuori.

Invertendo il teorema precedente, si ha l'altro che segue:

Per un punto, interiore o esteriore al cerchio, conducendo delle corde o seganti, e pei loro punti d'intersezione col cerchio menando a questo delle tangenti, i punti in cui le rispettive coppie di tangenti s'incontreranno, staranno tutti sopra una medesima retta, perpendicolare alla congiungente il punto dato col centro del cerchio.

Un'altra costruzione dei punti d'intersezione è la seguente. Sottraendo l'una dall'altra le due equazioni (m') ed (n') , si ottiene l'equazione:

$$x'^2 + y'^2 - x'y - x'\xi = 0, \quad (r)$$

la quale può esser adoperata in vece di (m') . Il luogo dell'equazione (n') è sempre il cerchio dato; quello di (r) è egualmente un cerchio, il cui centro è definito dalle coordinate $\frac{1}{2}x'$ e $\frac{1}{2}y'$, ed il cui raggio è:

$$\frac{1}{2}\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{1}{2} OM.$$

Quindi col punto I, medio di OM e col raggio $= \frac{1}{2} OM$ si descriverà un cerchio, il quale taglierà il cerchio dato nei cercati punti di contatto G, G'. È noto che questa costruzione è insegnata negli Elementi.

28. I risultamenti ottenuti nei n^{ri} **24** e **26** ci pongono nello stato di poter risolvere i problemi che si riferiscono a contatti di cerchi e rette. Della specie sono i tre che seguono: si cerca l'equazione di un cerchio, il quale:

1) sia tangente ad una data retta, e passi per due punti dati; 2) sia tangente a due rette date, e passi per un punto dato; 3) sia tangente a tre rette date.

Nei problemi di questa specie lo sviluppo completo delle formule richiede sempre un calcolo abbastanza lungo; e soltanto una scelta di assi accomodata ai dati della quistione potrà renderlo più breve. Ordinariamente la risoluzione delle equazioni si

protrae fino ad ottenere una costruzione facile ed elegante, ed a trovare nei risultamenti avuti un punto di appoggio a ricerche di ulteriori proprietà del sistema delle linee e punti che si presentano nel problema.

Così p. e. bastano i primi passi dell'analisi per costruire il 3° dei problemi precedenti; ciò che qui brevemente mostreremo. Siano:

$$y = ax + b \dots (1), \quad y = a'x + b' \dots (2), \quad y = a''x + b'' \dots (3)$$

le equazioni delle tre rette date, ed

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2$$

quella del cerchio dimandato. E poichè questo dovrà esser tangente alle tre rette date, dovranno esser soddisfatte (n° 24) le seguenti equazioni di condizione:

$$(\beta - a\alpha - b)^2 = r^2(1 + a^2),$$

$$(\beta - a'\alpha - b')^2 = r^2(1 + a'^2),$$

$$(\beta - a''\alpha - b'')^2 = r^2(1 + a''^2),$$

per mezzo delle quali restano determinate le tre incognite. E dividendo la prima di queste tre equazioni per la seconda e terza, r^2 verrà eliminata, e mediante estrazione di radice si avranno le relazioni:

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \pm \frac{\beta - a'\alpha - b'}{\sqrt{1 + a'^2}} \quad (4)$$

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \pm \frac{\beta - a''\alpha - b''}{\sqrt{1 + a''^2}}, \quad (5)$$

in cui dovranno esser presi positivamente i radicali $\sqrt{1 + a^2}$, ecc. Or queste due doppie equazioni, a causa del doppio segno, daranno quattro coppie di equazioni, ed ogni coppia, essendo di primo grado rispetto ad α e β , non darà per queste due incognite che un solo sistema di valori; il problema avrà dunque quattro soluzioni, ed in conseguenza si potranno descrivere quattro cerchi, che siano tangenti alle tre rette date. In fatti, se dalle equazioni (4) e (5) si elimini ancora un'incognita, e sia β , ne risulterà per α un'equazione di 4° grado. Ma se le stesse equazioni (4) e (5) si comparino all'equazione (5) del n° 17, si co-

noscerà subito che i loro luoghi geometrici sono quattro rette, che bisecano gli angoli formati dalle rette (1) e (2), (1) e (3). I punti d'intersezione di queste quattro rette, che si potranno facilmente costruire, saranno in conseguenza i centri dei quattro cerchi.

Congiunzione di più cerchi.

29. Consideriamo due cerchi: sia e la distanza dei loro centri C, C' , e ponendo l'origine nel centro C di uno dei cerchi ed il semiasse positivo delle x nella linea centrale CC' , le loro equazioni saranno :

$$y^2 + x^2 = r^2 \dots (1), \quad y^2 + (x - e)^2 = r'^2 \dots (2),$$

donde avremo per coordinate dei punti d'intersezione dei due cerchi :

$$x = \frac{e^2 + r^2 - r'^2}{2e} \quad (3)$$

$$y = \pm \frac{1}{2e} \sqrt{4e^2 r^2 - (e^2 + r^2 - r'^2)^2}. \quad (4)$$

È chiaro che il valore di x sarà sempre reale, e — supponendo che non sia $e=0$, vale a dire che i due cerchi non siano concentrici — determinato e finito. Al contrario y avrà valore immaginario, nullo, o ne avrà due reali, eguali e di segni contrarii, secondochè la differenza sottoposta al segno radicale sarà negativa, nulla o positiva. Nel primo caso i due cerchi non s'incontreranno; nell'ultimo vi sarà intersezione ed in due punti, i quali d'ambo i lati e ad eguali distanze della linea dei centri si troveranno sopra una retta ad essa perpendicolare, essendochè per l'equazione (3) essi punti avranno una medesima ascissa. Se in fine la quantità sottoposta al segno radicale risulti $=0$, i due cerchi avranno un sol punto comune sulla linea dei centri, ed in questo caso la retta (3) coinciderà colla tangente comune al punto in cui i due cerchi si toccheranno.

Risolvendo in fattori la differenza sottoposta al segno radicale dell'equazione (4), si troverà :

$$y = \pm \frac{1}{2e} \sqrt{(e+r+r')(e+r-r')(e+r'-r)(r+r'-e)};$$

donde si rileva che y sarà reale se, $r+r'+e$ essendo sempre

quantità positiva, i rimanenti tre fattori siano tutti positivi, ovvero uno positivo e gli altri due negativi. Ma quest'ultimo caso non può avvenire, imperochè se uno di questi fattori, e sia ad esempio $e + r - r'$, è negativo, sarà $e + r < r'$, quindi $e < r' - r$ ed $r < r'$: con ciò avremo $r' - r$ ed $r' - e$ positivi, ed in conseguenza positivi ancora saranno necessariamente gli altri due fattori. Quindi può enunciarsi la seguente proposizione:

Due cerchi, di cui r , r' siano i raggi ed e la distanza dei loro centri, s'intersecheranno in due punti, se ciascuna delle tre quantità r , r' , e sia minore della somma delle altre due.

Avverrà contatto dei due cerchi, se sia $y = 0$, vale a dire se uno dei mentovati tre fattori sparisca, ossia se $e = r' - r$, o $e = r - r'$, o in fine $e = r + r'$; in somma se $e = \pm(r - r')$, ovvero $e = r + r'$; o finalmente, riunendo queste due ultime equazioni in una, sarà $y = 0$, quando sia

$$e^2 = (r \pm r')^2. \quad (5)$$

Questa equazione esprime analiticamente la condizione di contatto di due cerchi, il quale avrà luogo se la distanza dei centri sia eguale alla somma o differenza dei loro raggi. Nel primo caso il contatto verrà detto esteriore, ed interiore nel secondo.

L'equazione (5) ci pone nello stato di risolvere quei problemi, in cui si richiegga contatto di cerchi; di cercare, p. e. un cerchio che passi per un dato punto e tocchi una data retta ed un dato cerchio; ovvero che tocchi una retta e due cerchi, ecc. In tutti questi casi non s'incontrerà difficoltà veruna nello stabilire le tre equazioni di condizione; ed i limiti di quest'opera non ci permettono dirne di più, perchè ci troveremmo condotti ad una trattazione che sempre sarebbe più o meno lunga. Vogliamo soltanto dir brevemente di un risultamento di più generale significato, relativo alle ricerche esposte in questo n° , ed a cui porge occasione l'equazione (3), la quale è già noto di essere l'espressione di una retta parallela all'asse delle y , ed in cui giacciono i due punti d'intersezione dei due cerchi, ovvero quello del loro contatto; e poichè questa retta, come quella ch'è data da un'equazione sempre reale, deve esistere quando anche i due cerchi non avessero punto comune, è chiaro che essa dovrà con essi cerchi avere una speciale relazione.

50. Siano in generale :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0 = K \quad (1)$$

$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - r'^2 = 0 = K' \quad (2)$$

le equazioni di due cerchi dati. Sottraendo l'una dall'altra, e ponendo per brevità

$$(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) - (\alpha'^2 + \beta'^2 - r'^2) = m^2,$$

avremo :

$$2y(\beta' - \beta) + 2x(\alpha' - \alpha) + m^2 = 0 = K - K'. \quad (3)$$

Essendo questa equazione di 1° grado rispetto ad x ed y , il suo luogo geometrico sarà una retta, la quale dovrà contenere i punti comuni ai due cerchi, se pur ve ne sono, imperocchè essa diviene identica per quei medesimi valori di x ed y che renderanno ad un tempo soddisfatte le equazioni $K = 0$ e $K' = 0$ [vedi la nota al n° 17]. Se i due cerchi si tagliano in due punti, sarà (3) l'equazione della secante comune condotta per quei due punti, ovvero della corda comune indefinitamente prolungata; se poi i due cerchi si toccano, sarà (3) l'equazione della tangente comune, menata pel punto di contatto, e che sta perpendicolare alla congiungente i centri dei due cerchi, la cui equazione è :

$$y - \beta = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} (x - \alpha).$$

Se in fine i due cerchi non avessero punto comune, neppure ne avrebbe con essi la retta (3), la quale purtuttavia non cesserebbe di esistere, rimanendo reale la sua equazione in ogni circostanza, ed avrebbe rispetto ai cerchi dati una determinata posizione. È appena da rammentarsi che questa retta non sia di versa dalla retta (3) del numero precedente.

Con Plücher diremo cordale questa retta che sempre esisto per due cerchi dati; e ci facciamo a brevemente esporne talune delle sue più essenziali proprietà.

I. La cordale di due cerchi è perpendicolare alla congiungente i loro centri, come risulta dalle cose precedenti.

II. Siano dati i tre cerchi : $K = 0$, $K' = 0$, $K'' = 0$, e tirate le loro cordali, prendendoli a due a due; saranno :

$$K - K' = 0, K - K'' = 0, K' - K'' = 0$$

le loro equazioni. E poichè ciascuna di queste è conseguenza delle altre due, così una qualunque di esse dovrà esser soddisfatta dai medesimi valori di x ed y , che renderanno soddisfatte le altre due. Da ciò segue il bel teorema:

Le tre cordali, appartenenti a tre cerchi dati presi a due a due, s'intersecano in un medesimo punto.

Questa proposizione conduce immediatamente ad un semplice processo di costruzione della cordale di due cerchi che non hanno punto comune, quando si consideri che la cordale di due cerchi che s'intersecano, n'è la secante comune. Siano (fig. 14) K, K' i cerchi dati; si descriva un qualunque cerchio ausiliario K'' , il quale taglia i cerchi dati in $a, b; a', b'$; le rette indefinite $ab, a'b'$ saranno le cordali relative ai cerchi K, K'' e K', K'' , le quali dovendosi incontrare in un punto m colla cordale dei cerchi K e K' , sarà m un punto della cordale richiesta: similmente se ne determinerà un secondo punto n mercè un altro cerchio ausiliario K''' , e la retta menata pei punti m ed n sarà la cordale richiesta dei cerchi K e K' .

III. Da un punto qualunque M (fig. 14) siano menate le tangenti MB ed MB' ai due cerchi K, K' , pei quali riteniamo le stesse equazioni (1) e (2); indichiamo con x, y le coordinate del punto M ; con t, t' le sue distanze dai punti di contatto B, B' ; e con d, d' le sue distanze dai centri dei cerchi K, K' ; avremo:

$$t^2 = d^2 - r^2, t'^2 = d'^2 - r'^2, \\ d^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2, d'^2 = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2.$$

Sottraendo l'una dall'altra queste ultime equazioni, ed avendo riguardo all'equazione (3), poichè il punto x, y appartiene alla cordale, avremo:

$$d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2,$$

ovvero

$$d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2; \quad (4)$$

quindi

$$t^2 = t'^2, \text{ ossia } t = t'. \quad (5)$$

Le equazioni (4) e (5) esprimono le seguenti proposizioni:

Le potenze (nd 23) rispetto a due cerchi sono eguali per ogni punto della cordale.

Da qualunque punto di una cordale di due cerchi siano a questi menate delle tangenti, le loro lunghezze fino ai punti di contatto saranno eguali.

Perciò molti autori danno alla cordale il nome di linea delle potenze eguali, o anche di asse delle potenze, o in fine di linea delle tangenti eguali. I matematici francesi la chiamano asse radicale.

Le mentovate proprietà della cordale menano a costruzioni molto eleganti nella soluzione di problemi specialmente relativi a contatti di cerchi, come andiamo a mostrare con esempj.

Problema. Costruire un cerchio che passi per due punti dati e tocchi un cerchio dato.

Sia K (*fig. 15*) il cerchio dato; A, B i punti, dati. Immaginando già descritto il cerchio richiesto K' , conduciamo pei punti A, B un cerchio di raggio arbitrario, il quale tagli il cerchio K in due punti, e siano D, E ; le rette AB, DE saranno cordali dei cerchi C e K' , C e K , e la loro intersezione G sarà un punto (Prop. II) della cordale dei cerchi K e K' ; e poichè questi due cerchi debbono a vicenda toccarsi, la loro cordale ne sarà tangente comune. Perciò conducendo dal punto G le tangenti GH, GI al cerchio dato, i loro punti di contatto m ed n saranno ancora punti di contatto del cerchio dato e di quello che si cerca; quindi è che vi saranno due cerchi i quali soddisferanno al problema. La quistione è dunque ridotta a descrivere cerchi che passano per tre punti dati: A, B, m ; ed A, B, n . Condotti i raggi Km, Kn , si prolunghino sino alle loro intersezioni K', K'' colla perpendicolare elevata dal punto medio di AB ; saranno K', K'' i centri dei cerchi richiesti.

Problema. Descrivere un cerchio che passi per due punti dati A, B e tocchi la retta data LL' .

Pei punti dati (*fig. 16*) conduciamo un qualunque cerchio sussidiario C , e la retta AB , la quale taglierà la retta LL' in un punto D . È chiaro esser AB la cordale del cerchio ausiliario e di quello che si cerca, e D un punto di essa; in conseguenza conducendo dal punto D la DE tangente al cerchio ausiliario, quella che dallo stesso punto D sarà menata al cerchio che si cerca, avrà (Prop. III) una lunghezza $= DE$. Laonde descrivendo col centro D ed intervallo DE un cerchio, i punti m ed n in cui

taglierà la LL' , saranno i punti di contatto di questa retta col cerchio che si cerca; due cerchi dunque saranno per soddisfare le condizioni del problema; e ne otterremo facilmente i centri K e K' , se dal punto medio di AB eleveremo una perpendicolare, e la prolungheremo fino ad incontrare le perpendicolari elevate su LL' dai punti m ed n .

CAPO QUARTO.

DELLE LINEE DEL SECOND' ORDINE IN GENERALE OSSIA DELLA SIGNIFICAZIONE GEOMETRICA DELL'EQUAZIONE GENERALE DEL SECONDO GRADO TRA DUE VARIABILI.

31. Poichè ogni curva formata secondo una determinata legge, può esser rappresentata da un'equazione $F(x, y) = 0$ tra le coordinate di un suo punto, e che in conseguenza tutte le possibili curve nelle loro forme infinitamente variate debbano esser contenute in equazioni di questa specie; così nell'esame delle curve si potrà scegliere per punto di partenza il carattere analitico, espresso nelle loro equazioni, ed averne in tal modo una sistematica distribuzione.

Quindi le curve vengono immediatamente distinte in due classi: algebriche e trascendenti, secondochè algebrica o trascendente ne sarà l'equazione.

Noi potremo sempre supporre che l'equazione di una curva algebrica, $F(x, y) = 0$, sia liberata dalle espressioni frazionarie e radicali che potrebbe contenere, e che in conseguenza $F(x, y)$ sia una funzione intera e razionale delle variabili x, y . Tutte le curve algebriche si conterranno dunque nell'equazione:

$$Ay^n + (Bx + C)y^{n-1} + (Dx^2 + Ex + F)y^{n-2} + \dots = 0 \quad (\alpha);$$

nella quale $A, B, C, \dots$ sono quantità costanti, ed n rappresenta un numero intero e positivo. E volendo suddividere le curve algebriche, all'uopo si presenta subito il grado dell'equazione (α) e si presenta solo, e così distribuiamo le linee algebriche secondo il grado della corrispondente equazione in linee del $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots n^{\text{esimo}}$ grado ovvero n^{esimo} ordine.

Quindi la linea retta è una linea del 1° ordine, ed è noto

esser la sola di questa specie. Il cerchio è una curva del 2° ordine; e poichè un'equazione di 2° grado tra x ed y deve soddisfare talune condizioni (n° 20) per significare un cerchio, ne deduciamo che il cerchio non sarà la sola linea del 2° ordine.

Questa distinzione delle linee algebriche secondo il grado della loro equazione sarebbe evidentemente inammissibile, se il grado dell'equazione non rimanesse inalterato, qualunque fosse il sistema degli assi a cui la curva vada riferita. Or è facile dimostrare che il grado dell'equazione (α), e con esso il suo significato geometrico sono del tutto indipendenti dalla scelta del sistema di coordinate. Ed invero, se dopo aver riferita l'equazione (α), di cui sarà luogo geometrico una certa curva, a qualsivoglia sistema di coordinate, noi passiamo da questo ad un nuovo sistema, avremo da sostituire nell'equazione (α) le espressioni che ci son date dalle formole (3) nel n° 4; le quali essendo di 1° grado rispetto alle nuove coordinate $x''y''$, ne otterremo una nuova equazione che sarà ancora dello n^{esimo} grado, e che avrà per luogo geometrico la medesima curva.

Una linea dello n^{esimo} ordine non può esser incontrata da una retta in più di n punti.

Imperocchè sia $y = ax + b \dots (\beta)$ l'equazione di una retta che incontra la curva (α). Per determinare i punti d'intersezione, elimineremo una delle incognite, la y per esempio, dall'equazioni (α) e (β), ed avremo così un'equazione in x , le cui radici rappresenteranno le ascisse dei punti d'intersezione. Ma le equazioni (β) ed (α) sono rispettivamente di 1° ed n^{esimo} grado: dunque l'eliminata non potrà superare lo n^{esimo} grado, e non potrà in conseguenza avere più di n radici.

Una linea del second'ordine, non può dunque esser intersecata da una linea retta in più di due punti. E di queste linee in generale ci occuperemo in questo capo.

32. L'equazione generale del 2° grado tra due variabili x ed y ha la forma :

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + F = 0, \quad (1)$$

che per le cose dette nel n° precedente potremo riferire a coordinate rettangolari senza ledere la generalità della teorica.

Per conoscere il significato geometrico dell'equazione (1), dobbiamo cercare di ridurla a forma più semplice: ciò che otterremo

mo mercè una trasformazione di coordinate, nella quale l'origine e la direzione dagli assi saranno scelte in modo da far sparire taluni termini nell'equazione trasformata. Le seguenti considerazioni ne somministreranno il mezzo.

Sia M_1NM_2 (fig. 17) un' arco della curva, ottenuta mercè la costruzione dell'equazione (1); A un punto qualunque nel piano di essa, e le cui coordinate siano ξ, η ; meniamo per A una qualsivoglia retta, la cui inclinazione all'asse delle x essendo indicata da φ , ne avremo l'equazione espressa da:

$$y - \eta = m(x - \xi), \quad (2)$$

ponendo per brevità $m = tg\varphi$. Eliminando y dalle equazioni (1) e (2), avremo:

$$px^2 + 2q\eta x + r = 0 \quad (3)$$

nella quale supponiamo

$$\left. \begin{aligned} p &= A + A'm^2 + 2Bm, \\ q &= (A'm + B)(\eta - m\xi) + C + C'm, \\ r &= A'(\eta - m\xi)^2 + 2C'(\eta - m\xi) + F. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

L'equazione (3) ammetterà in generale due diverse radici x_1, x_2 , le quali quando siano reali, esprimeranno evidentemente le ascisse dei punti d'intersezione della retta (2) colla curva (1). Donde segue, com'è stato già osservato, che una linea del second'ordine non può esser intersecata da una retta in più di due punti.

Chiameremo corda della curva la porzione M_1M_2 della secante, e supporremo che il punto $A(\xi, \eta)$ la divida per metà. Qual condizione a ciò noi faremo $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, indicando con x_1, x_2 le radici dell'equazione (3). E per un teorema noto della teorica delle equazioni avremo:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2q}{p}, \text{ donde } \xi = -\frac{q}{p}, \text{ ossia } p\xi = -q.$$

Or sostituendo questo valore di q nella 2^a delle equazioni (4), ed eliminando p dalle due prime, si avrà:

$$A\xi + B\eta + C + m(A'\eta + B\xi + C') = 0, \quad (5)$$

equazione ch'esprime la condizione a cui debbono soddisfare le

coordinate ξ , η del punto medio di una corda inclinata all'asse delle x sotto l'angolo φ .

53. Or vediamo se sia possibile di assegnare tal posizione al punto ξ , η che ogni corda menata per esso, ne resti divisa per metà. Dovendo all'uopo l'equazione (5) esser soddisfatta per qualunque valore di $m = tg \varphi$, essa si scinderà nelle due seguenti:

$$A\xi + B\eta + C = 0, \quad A'\eta + B\xi + C' = 0, \quad (6)$$

dalle quali si hanno per ξ ed η i valori:

$$\xi = \frac{A'C - BC'}{B^2 - AA'}, \quad \eta = \frac{AC' - BC}{B^2 - AA'}; \quad (7)$$

i quali conducono ai seguenti risultati.

a) Se la quantità $B^2 - AA'$ è diversa da zero, si avrà un solo punto nel piano della curva (1), il quale dividerà per metà ogni corda che vi sia condotta. Il luogo di questo punto sarà definito dalle equazioni (6) o (7); ed il punto che gode di questa proprietà, dicesi centro della curva.

b) Se $B^2 - AA' = 0$, senza che siano contemporaneamente nulli i due numeratori nelle equazioni (7), i precodenti valori di ξ , η , od uno di essi almeno diverrà infinito: ed in questo caso la curva non avrà centro alcuno. Purtuttavia potrà ammettersi, considerandolo come situato a distanza infinita.

c) Se in fine, oltre al denominatore $B^2 - AA'$, anche i numeratori di (7) sono nulli, quelle espressioni assumeranno la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, donde si arguirà l'esistenza d'infiniti centri. E ciò avverrà quando le due equazioni (6) non essendo essenzialmente diverse l'una dall'altra, esse rappresentano una retta che sarà il luogo geometrico degli infiniti centri.

Del resto questo caso, senza che dall'equazione (1) sparisca alcuna delle coordinate, potrà aver luogo solamente, o quando 1) sia $A'C = BC'$, donde per essere $B^2 = AA'$, risulterà $AC' = BC$, ovvero 2) quando sia $C = C' = 0$. In ambo i casi nessuna curva, ma in vece un sistema di due rette parallele sarà il luogo geometrico dell'equazione (1). In fatti, moltiplicando nel primo caso l'equazione (1) per A , e ponendo B^2 in vece di AA' e BC in vece di AC' , avremo:

$$(Ax + By)^2 + 2C(Ax + By) + AF = 0;$$

donde

$$Ax + By = -C \pm \sqrt{C^2 - AF}, \quad (m)$$

equazione che evidentemente significa due rette parallele. Nel secondo caso poi essendo $C = C' = 0$ l'equazione (1) si riduce alla forma :

$$Ax + By = \pm \sqrt{-AF}, \quad (n)$$

la quale appartiene ancora a due rette parallele. E sì nell' uno che nell'altro caso la quantità sottoposta al segno radicale dovrà esser positiva, poichè in contrario l'equazione (1) non ammetterebbe verun significato geometrico. Or nel 1° caso le due equazioni (6) si riducono all' unica: $A\xi + B\eta + C = 0 \dots (m')$, e nel 2° ad: $A\xi + B\eta = 0 \dots (n)$. Ma (m') rappresenta una retta la quale giace in mezzo alle due rette (m) parallelamente ad esse, e perciò ogni suo punto ha la proprietà di dividere per mezzo tutte le congiungenti (corde), che vi sono condotte, delle due rette (m) . Altrettanto vale per (n) rispetto alle rette (n) . E le due parallele (m) o (n) coincideranno in una, quando l'espressione sottoposta al segno radicale risulti nulla. Dunque :

Tutte le curve del 2° ordine, rappresentate dall'equazione (1), debbono distinguersi in due classi, l'una delle quali comprenderà le curve che hanno un centro (se $B^2 - AA' \geq 0$), l'altra poi sarà costituita dalle curve che non possono aver centro.

Se per le curve che hanno centro, si tolga questo punto ad origine, necessariamente la loro equazione acquisterà la proprietà di rimanere invariata, quando ad x, y si sostituiscano $-x, -y$. Imperocchè, sia O (fig. 18) centro ed origine ad un tempo di una curva, OM una retta qualunque per esso condotta e che tagli la curva in M ; prolungando MO e prendendo $OM' = OM$, M' dovrà essere ancora un punto della curva; quindi le coordinate dei punti M ed M' dovranno avere valori numerici eguali e di segni contrarii. Perciò se x, y rappresentano due valori delle coordinate, i quali rendano soddisfatta l'equazione della curva, anche pei valori $-x, -y$ dovrà risultare altrettanto. Ed è chiaro che la curva avrà questa proprietà sol quando tutti i termini dipendenti da x ed y abbiano nel tempo stesso numero pari o impari di dimensioni rispetto ad x ed y .

Donde segue che i termini lineari in x ed y dovranno sparire dall'equazione (1), quando senza mutare la direzione degli assi si ponga l'origine nel centro, se mai tal punto esista. Ed in fatti ponendo $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$ nell'equazione (1), questa si trasformerà in :

$$\left. \begin{aligned} Ax'^2 + A'y'^2 + 2Bx'y' + 2(A\xi + B\eta + C)x' \\ + 2(A'\eta + B\xi + C')y' \end{aligned} \right\} = K,$$

facendo per brevità :

$$K = -(A\xi^2 + A'\eta^2 + 2B\xi\eta + 2C\xi + 2C'\eta + F).$$

Or se l'origine è centro della curva, l'ultima equazione mercè le equazioni (6) assumerà la forma più semplice :

$$Ax'^2 + A'y'^2 + 2Bx'y' = K, \quad (8)$$

nella quale i coefficienti A, A', B sono identici a quelli dell'equazione (1), e l'espressione di K si lascia ridurre alla forma più semplice :

$$K = -(C\xi + C'\eta + F), \quad (9)$$

imperocchè la parte di K , rappresentata da

$$A\xi^2 + A'\eta^2 + 2B\xi\eta + C\xi + C'\eta = (A\xi + B\eta + C)\xi + (A'\eta + B\xi + C')\eta$$

dovrà sparire in conseguenza dell'equazione (7).

54. Ritorniamo ora all'equazione (5) :

$$A\xi + B\eta + C + m(A'\eta + B\xi + C') = 0, \quad (5)$$

nella quale è noto che ξ, η rappresentano le coordinate del punto medio di una corda inclinata all'asse delle ascisse sotto l'angolo φ , e che $m = \tan \varphi$. Considerando m come costante e ξ, η come coordinate variabili, vale a dire immaginando condotta una serie di corde parallele, l'equazione (5) esprimerà la relazione che dovrà aver luogo tra le coordinate dei punti medii di queste corde, ed essa sarà in conseguenza l'equazione del luogo geometrico di essi punti, il quale luogo geometrico sarà una linea retta, essendochè l'equazione è di 1° grado rispetto a ξ ed η . Donde segue che nelle linee del 2° ordine i punti medii di un sistema di corde parallele stanno in linea retta.

Una linea retta o curva, la quale bisecchi una serie di corde parallele di una curva, dicesi diametro di essa curva.

Tutte le linee del 2° ordine dunque hanno diametri rettilinei.

E poichè l'equazione (5) del diametro appartenente ad un sistema di corde inclinate sotto l'angolo φ all'asse delle ascisse, può sussistere per ogni valore di $m = \operatorname{tg} \varphi$, egli è chiaro che ad ogni sistema di corde parallele corrisponde un diametro.

Risolvendola rispetto ad η , l'equazione (5) del diametro prende la forma:

$$\eta = -\frac{A + Bm}{A'm + B} \xi - \frac{C + C'm}{A'm + B}. \quad (10)$$

Chiamando ψ l'angolo d'inclinazione di questo diametro all'asse delle x e ponendo $m' = \operatorname{tg} \psi$, avremo mercè l'equazione (10)

$$m' = -\frac{A + Bm}{A'm + B}. \quad (11)$$

Supponendo che nell'equazione (1) sia $B^2 - AA' \geq 0$, è noto dover esistere un centro, le cui coordinate saranno date dalle equazioni (6), e come chiaramente risulta dalla comparazione di queste equazioni coll'equazione (5), esse renderanno soddisfatta quest'ultima equazione. Da ciò si rileva che in ogni linea del 2° ordine, che ha centro, tutti i diametri s'intersecano in questo punto; e viceversa: ogni corda condotta pel centro è un diametro, essendochè $m = \operatorname{tg} \varphi$ è quantità arbitraria.

Ma la cosa va diversamente, quando è $B^2 - AA' = 0$; imperocchè moltiplicando numeratore e denominatore dell'espressione (11) per A' , e sostituendo B^2 ad AA' , ne risulta $m' = -\frac{B}{A'}$; donde segue che in questo caso la direzione del diametro è indipendente da quella delle corde; l'equazione del diametro si trasforma in

$$\eta = -\frac{B}{A'} \xi - \frac{C + C'm}{A'm + B};$$

ed in conseguenza esprime egualmente che per ogni sistema di

corde avvi un determinato diametro, ma che tutti i diametri son paralleli tra loro ; quindi il loro punto di comune intersezione (il centro) giace a distanza infinita.

Risolvendo l'equazione (11) rispetto ad m , si ottiene

$$m = - \frac{A + Bm'}{A'm' + B} ,$$

risultamento che avremmo potuto ottenere dalla stessa equazione (11) mercè il solo scambio di m con m' . Quindi se immaginiamo un secondo sistema di corde parallele ad un qualunque diametro (5) , il diametro appartenente al secondo sistema sarà parallelo al primo sistema di corde. Con ciò si avranno due diametri ciascuno dei quali biseca il sistema delle corde parallele all'altro. Una coppia di simili diametri va sotto il nome di diametri coniugati. E poichè una delle quantità m , m' può esser presa ad arbitrio , ne segue che ogni diametro ha il suo coniugato, e che in conseguenza nelle linee del 2° ordine vi sono infiniti sistemi di diametri coniugati.

In fine l'angolo u , sotto cui un diametro taglia il suo sistema di corde , è dato dall'equazione:

$$\operatorname{tg} u = \frac{m - m'}{1 + mm'} ,$$

ed in generale è diverso dall'angolo retto.

53. Nulla osta di prendere per asse delle ascisse un diametro e porre l'asse delle y parallelo al corrispondente sistema di corde. E tosto ch'è l'equazione (1) sia trasformata in questo nuovo sistema di coordinate , ad ogni valore di x , per esempio, $= OP$ (fig. 19) corrisponderanno due valori eguali ed opposti di y : $PM = PM'$, e quindi la trasformata sarà rispetto ad y un'equazione pura del 2° grado. Con ciò si avrà un secondo mezzo di semplificare l'equazione (1) , stantechè per esso andranno a sparire i termini contenenti y a prima potenza. E poichè con questo mezzo si va incontro generalmente ad un sistema di coordinate oblique , così sorge la quistione , se le linee del 2° ordine non potessero per avventura aver diametro che tagli ad angolo retto le corrispondenti corde.

Un diametro , che tagli ad angolo retto le sue corde , dicesi diametro principale, e direzione principale quella

delle corrispondenti corde. È evidente che un diametro principale divide la curva in due parti simmetriche.

56. Indicando, come per lo innanzi, con m ed m' le tangenti degli angoli φ e ψ , che un sistema di corde parallele ed il corrispondente diametro formano coll'asse delle x , l'equazione $mm' + 1 = 0$ esprimerà la condizione che il diametro interseca il sistema delle corde ad angolo retto: ed eliminandone m' mercè l'equazione (11), si avrà:

$$\frac{A' m + B}{A + B m} = m \quad (12)$$

Da questa equazione in varii modi si può dedurre il valore dell'angolo φ , che determina una direzione principale. Scrivendo $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ in vece di $m = \operatorname{tg} \varphi$, e facendo sparire i denominatori, si avrà:

$$(A' - A) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + B(\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) = 0, \quad (13)$$

dove, per essere $\operatorname{sen} 2\varphi = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$ e $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi$, risulta:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = - \frac{2B}{A' - A} \quad (14)$$

Intanto ordinando l'equazione (12) rispetto ad $m = \operatorname{tg} \varphi$, si ottiene:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{A' - A}{B} \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0, \quad (15)$$

dalla quale si ha:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A' - A \pm \sqrt{(A' - A)^2 + 4B^2}}{2B}. \quad (16)$$

Quest'equazione somministrando, del pari che l'equazione (14), due valori sempre reali di $\operatorname{tg} \varphi$, dimostra che le linee del 2° ordine ammettono in generale due direzioni principali, ed in conseguenza due diametri principali.

Indicando con φ_1 e φ_2 i due valori di φ dati dall'equazione (16), saranno $\operatorname{tg} \varphi_1$ e $\operatorname{tg} \varphi_2$ le radici dell'equazione (15); e per un noto teorema della teoria delle equazioni sarà:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = -1,$$

vale a dire che i due diametri principali s'incontrano ad angolo retto.

Queste deduzioni vogliono esser modificate in una circostanza che ci viene manifestata dalla contraddizione in cui sembrano trovarsi coi risultamenti ottenuti nel n° 34, vale a dire che quando si ha $B^2 - AA' = 0$, tutti i diametri sono a vicenda paralleli. Perchè ciò si chiarisca, noi partendo dall'equazione (12) prenderemo un'altra via per determinare la direzione principale. Ponendo il denominatore $A + Bm = s$, avremo in vece di (12) il sistema delle due equazioni:

$$\left. \begin{aligned} A'm + B &= ms, \text{ ovvero } (A' - s)m + B = 0, \\ A + Bm &= s, \qquad \qquad A - s + Bm = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Eliminandone m , si ottiene primieramente :

$$(A - s)(A' - s) - B^2 = 0,$$

ossia

$$s^2 - (A + A')s - (B^2 - AA') = 0, \quad (18)$$

donde

$$s = \frac{A + A'}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(A - A')^2 + 4B^2}. \quad (19)$$

Indicando con s_1, s_2 queste due radici sempre reali dell'equazione (18), la loro sostituzione in una delle equazioni (17) ci darà i richiesti valori di m, m_1 ed m_2 , per le due direzioni principali, come l'abbiamo già presentati nell'equazione (16).

Or egli è chiaro che possono darsi tre casi.

1. Le due radici s_1 ed s_2 potranno esser diverse da zero, e tra esse.

Per ciò si richiede la condizione :

$$\frac{A + A'}{2} \geq \frac{1}{2} \sqrt{(A - A')^2 + 4B^2},$$

la quale convenientemente ridotta diviene $B^2 - AA' \geq 0$; quindi la curva ha un centro. Mercè s_1 ed s_2 noi abbiamo da (17) due determinati valori di m , e con ciò due direzioni principali, a cui corrispondono due diametri principali l'uno all'altro perpendicolare, e che s'intersecano nel centro della curva.

II. Le due radici s_1, s_2 possono esser eguali e diverse da zero. Per ciò fa d'uopo che il radicale sparisca in (19), e che in conseguenza sia:

$$A = A', B = 0;$$

donde $s_1 = s_2 = A = A'$. L'equazione (12) o le (17) in questo caso verranno soddisfatte da qualunque valore di m , vale a dire che ogni direzione sarà principale, e quindi ogni retta menata pel centro (esistente in questo caso a cagione di $B^2 - AA' = -A^2 < 0$) sarà diametro principale. E da ciò segue necessariamente che tutti i punti della curva debbono essere equidistanti dal centro. Imperocchè sia C (fig. 20) il centro, AB un diametro qualunque che incontri la curva in A e B , ed in conseguenza $AC = BC$, ed in fine sia M un punto qualsivoglia della curva. Si conduca la corda AM , e pel centro C si meni ad essa la perpendicolare PQ . Or questa retta, come ogni altra condotta pel centro, essendo un diametro principale, dovrà bisecare la corda AM ; sarà dunque $AD = MD$, ed in conseguenza $MC = AC$. L'equazione (1), nell'ipotesi che siano eguali i coefficienti dei quadrati di x ed y e che manchi il termine in xy , disegnerà dunque un cerchio: ciò ch'è pienamente conforme ai risultamenti ottenuti nel n° 19.

III. Sia una delle due radici, p. e. $s_1 = 0$. Perciò si richiede che il termine noto sparisca nell'equazione (18), e che in conseguenza sia:

$$B^2 - AA' = 0.$$

Dall'equazione (18) si deduce che la 2ª radice sarà: $s_2 = A + A'$.

Con questi valori di s otterremo da (17) due direzioni principali interamente determinate:

$$m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{B}{A'}, \quad m_2 = \frac{A'}{B} = \frac{B}{A};$$

ma alla seconda soltanto delle due corrisponde un determinato diametro principale. Ed in vero, introducendo nell'equazione (10) che rappresenta qualunque diametro, in vece di $A + Bm$ ed $A'm + B$ i valori di s ed ms , tratti dall'equazioni (17), otterremo per equazione di un diametro principale:

$$s(\xi + m\eta) + C + C'm = 0. \quad (20)$$

*

Or egli è chiaro che questa equazione apparterrà ad una retta interamente definita — ad un determinato diametro principale — se v'introdurremo i precedenti valori di $s = s_*$ ed $m = m_*$. Sol tanto pel 2° diametro principale si avrà da (20) nell'ipotesi di

$$s = s_* = 0, \text{ ed } m = m_* = -\frac{B}{A'},$$

$$0.(\xi + m_*\eta) + C + C'm_* = 0,$$

ove sono da distinguersi due casi.

1) Se $C + C'm = (CA' - BC') : A = 0$, per la qual cosa si richiede che sia $A'C = BC'$, ovvero $C = C' = 0$, il luogo geometrico dell'equazione (1) avrà in questo caso infiniti centri (n° 32); e l'equazione (21) rimanendo soddisfatta per qualsiasi valore di ξ ed η , è chiaro che ogni retta menata perpendicolarmente alla corda, definita di direzione mercè m_* , sarà un diametro principale. Or ciò non può avvenire, se non quando ogni punto di simile corda potrà esser riguardato come punto medio: quindi la corda dovrà essere infinitamente lunga e non incontrare il luogo geometrico dell'equazione (1) nè da un lato nè dall'altro; la qual cosa può avvenire sol quando esso luogo consiste in un sistema di due rette parallele: risultamento conforme a quello ottenuto nel n° 32. Qui dunque abbiamo un definito diametro principale ed infiniti altri ad esso perpendicolari.

2) Ma se $C + C'm$ è diversa da zero, nel qual caso il luogo dell'equazione (1) non ammette centro, l'equazione (21) non potrà esser soddisfatta da verun valore finito di ξ ed η . Diamo all'equazione (20) la forma:

$$\eta = -\frac{1}{m}\xi - \frac{C + C'm}{ms},$$

facciamo in questa $m = m_*$, e poniamo che s decresca continuamente: avremo così l'espressione di una retta che parallelamente a se stessa si allontana sempre più dall'origine, e per $s = s_* = 0$ essa diviene un diametro principale, il quale giace ad una distanza infinita, e quindi non esiste. In questo unico caso noi abbiamo un solo diametro principale, inclinato all'asse delle x sotto l'angolo ψ , la cui tangente trigonometrica essendo $= m_*$, abbiamo

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{A}{B} = -\frac{B}{A'}.$$

Osservazione. Le due radici dell'equazione (18) non possono essere $= 0$, imperocchè si richiederebbe $A = A' = 0$, $B = 0$, e l'equazione (1) si abbasserebbe al 1° grado.

37. Le precedenti ricerche or ci offrono il mezzo di ridurre l'equazione (1) alla forma più semplice mercè trasformazione di coordinate.

Avendo veduto nel n° precedente che si ha sempre un diametro principale almeno, potremo toglier questo per asse delle x ; ed attuando questa trasformazione, per la quale il sistema degli assi dovrà girare dell'angolo φ determinato dall'equazione (16), l'equazione (1) [n° 33] perderà i termini contenenti y a 1ª potenza, ed assumerà la forma:

$$Mx^2 + Ny^2 + 2Rx + F = 0, \quad (23)$$

la quale conterrà in conseguenza tutte le linee del 2° ordine.

Per effetto di questa trasformazione il coefficiente M di x^2 , potrà esser un numero, ovvero esser $= 0$.

Nel 1° caso l'equazione (23) potrà esser liberata del termine contenente x a 1ª potenza, ponendovi $x = x' - \frac{R}{M}$, vale a dire facendo retrocedere l'origine sull'asse delle x della quantità $R : M$. Così l'equazione (23) otterrà la forma:

$$Mx'^2 + Ny'^2 = K. \quad (I)$$

Nel 2° caso l'equazione (23) a cagione di $M = 0$, diverrà $Ny^2 + 2Rx + F = 0$, dalla quale potrà menarsi via il termine costante F , ponendovi $x = x' - \frac{F}{2R}$, ossia movendo l'origine sull'asse delle x della quantità $-\frac{F}{2R}$. Con ciò si avrà:

$$Ny^2 + 2Rx = 0. \quad (II)$$

Come chiaramente apparisce dalla forma dell'equazione (I), l'origine giacerà nel centro della curva, le cui coordinate son date dall'equazione (7), ed i diametri principali ne saranno gli assi coordinati. Questa equazione comprenderà dunque quei luoghi geometrici dell'equazione (1), i quali avranno un centro, o infiniti centri.

Dalla forma poi dell'equazione (II) si scorge che l'origine non

è centro, e che soltanto l'asse delle x è un diametro principale; e poichè da questa equazione non può menarsi via il termine lineare $2Rx$, così essa dovrà comprendere quei luoghi geometrici dell'equazione (1), i quali non possono aver centro.

Passiamo ora alla discussione di queste equazioni.

38. Discussione dell'equazione:

$$Mx^2 + Ny^2 = K. \quad I$$

Poichè la quantità M , diversa da zero, può sempre supponersi positiva, così avremo da considerare i seguenti casi.

1) N positiva.

α) K positiva. Il luogo geometrico dell'equazione I in questo caso è una curva, la cui forma si ottiene facilmente mercè la seguente discussione. Da $y=0$ segue $x = \pm \sqrt{\frac{K}{M}}$; la curva dunque taglia l'asse delle x nei due punti A, A' (fig. 31), la cui distanza dall'origine (centro della curva) è $= \pm \sqrt{\frac{K}{M}}$.

Similmente per $x=0$ si trova $y = \pm \sqrt{\frac{K}{N}}$; e questi due valori disegneranno le ordinate dei due punti d'intersezione B, B' della curva coll'asse delle y . Segue in ultimo dall'equazione (I):

$$y = \pm \sqrt{\frac{M}{N} \left(\frac{K}{M} - x^2 \right)}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{N}{M} \left(\frac{K}{N} - y^2 \right)};$$

donde si rileva che y avrà espressione immaginaria per ogni valore di x che sia numericamente $> \sqrt{\frac{K}{M}}$; similmente ad ogni

valore di $y > \sqrt{\frac{K}{N}}$ corrisponderà un valore immaginario di x ; quindi nessun punto della curva starà fuori il rettangolo formato dalle quattro rette, condotte pei punti A, A', B, B' parallelamente ai due assi coordinati. Viceversa ad ogni valore positivo o negativo di x , il cui valore numerico non superi $\sqrt{\frac{K}{M}}$, corrisponderanno due valori reali, eguali ed opposti di y ; la no-

stra curva è dunque chiusa e limitata in tutte le direzioni. L'ordinata y avrà massimo valore nei punti B, B' a cui corrisponde $x = 0$; ed il suo valore andrà sempre diminuendo, come quello di x (positivo o negativo) andrà crescendo, e diverrà finalmente $= 0$ per $x = \pm \sqrt{\frac{K}{M}}$.

E ciò è sufficiente a potersi chiaramente rappresentare questa curva, la quale ha nome di ellisse.

Le parti AA' e BB' dei diametri principali, determinate per intersezione colla curva, costituiscono gli assi dell'ellisse, l'uno maggiore, l'altro minore. Ponendo le loro metà, $OA = a$,

$OB = b$, si avrà $a = \sqrt{\frac{K}{M}}$, $b = \sqrt{\frac{K}{N}}$; i quali valori, in-

trodotti nell'equazione (I), la trasformano in

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ ovvero } a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \quad (24)$$

I punti estremi degli assi, A, A', B, B' si dicono vertici dell'ellisse.

Nel caso che sia $M = N$, sarà $a = b$, e l'equazione I e (24) diverranno:

$$x^2 + y^2 = \frac{K}{M}, \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

le quali appartengono ad un cerchio di raggio $a = \sqrt{\frac{K}{M}}$. Il cerchio è dunque da considerarsi come un caso speciale dell'ellisse.

β) *K negativa*. Poichè la somma di due quantità essenzialmente positive, Mx^2 ed Ny^2 , non può risultare negativa, non potrà in questo caso l'equazione I aver significato geometrico. (Curva immaginaria).

γ) $K = 0$. L'equazione I riducendosi in questo caso a:

$$Mx^2 + Ny^2 = 0,$$

non può esser soddisfatta che dai valori $x = 0$, $y = 0$. Questa equazione, del pari che l'equazione (I), disegnerà in questo caso un punto, e propriamente l'origine attuale, le cui coordinate rispetto agli assi primitivi son date dalle equazioni 7.

2) *N* negativa.

Ponendo, per mettere in veduta il coefficiente di y^2 , $N = -N'$, noi avremo a considerare l'equazione :

$$Mx^2 - N'y^2 = K, \quad (25)$$

nella quale N' indica una quantità essenzialmente positiva.

a) K positiva. Dall'equazione (25) si ha

$$y = \pm \sqrt{\frac{M}{N'} \left(x^2 - \frac{K}{M} \right)}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{N'}{M} \left(y^2 + \frac{K}{N'} \right)}$$

Essendochè $x = 0$ rende y immaginaria, l'asse delle y non sarà incontrato dalla curva; ma l'asse delle x lo sarà in due punti A, A' (fig. 35) per le cui ascisse OA ed OA' si hanno i valori $\pm \sqrt{\frac{K}{M}}$. E poichè per ogni valore positivo o negativo di x , che numericamente sia $< \sqrt{\frac{K}{M}}$, y diviene immaginaria, così nessun punto della curva giacerà tra le due rette, che perpendicolarmente all'asse x siano condotte pei punti A, A' . Viceversa ad ogni valore positivo o negativo di x , che sia assolutamente $> \sqrt{\frac{K}{M}}$, corrisponderanno due eguali ed opposti valori di y , i quali insieme con x andranno crescendo all'infinito. La curva dunque, rappresentata dall'equazione (25), si comporrà di due rami distinti, che giaceranno d'ambo le parti dell'asse delle coordinate; ed ognuno dei due rami si estenderà indefinitamente e simmetricamente dai due lati dell'asse delle x :

Questa curva porta il nome d'iperbole. Da un solo dei due assi principali essa viene incontrata nei punti A, A' che diconsi vertici dell'iperbole. La porzione AA' di un diametro principale, compresa tra i due vertici, dicesi asse primario (ancora asse trasverso, asse reale); rappresentandone la parte $OA = OA'$ con a , ne viene $a = \sqrt{\frac{K}{M}}$; e ponendo $\sqrt{\frac{K}{N'}} = b$, l'equazione (25) dell'iperbole assumerà la forma :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{ovvero} \quad a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2, \quad (26)$$

la quale, come si vede, può dedursi da quella dell' ellisse (21) ponendovi $-b^2$ in vece di b^2 ovvero $b\sqrt{-1}$ in vece di b . E poichè dall'equazione (26) per $x=0$ risulta $y = \pm b\sqrt{-1}$ come ordinata del punto (immaginario) d' intersezione dell' iperbole coll' asse delle y , così per analogia all' ellisse la quantità $2b$ nomasi asse secondario o immaginario, e se ne porta la metà b sul diametro principale secondario, d' ambo i lati a contare dal centro.

Per $M=N'=-N$ sarà $a=b$, e l' iperbole si dirà equilatera.

2) K negativa. Mutando i segni dei due membri, l' equazione (25) diverrà in questo caso :

$$N'y^2 - Mx^2 = K,$$

la quale avendo la stessa forma dell' equazione (25) rappresenterà ancora un' iperbole, colla differenza però che l' asse primario si confonderà nel caso presente con quello delle y .

3) $K=0$. Si ha in questo caso dall' equazione (25) $y = \pm a\sqrt{\frac{N'}{M}}$; equazione, la quale ha per luogo geometrico un sistema di due rette che s' intersecano nell' origine.

$$3) N=0.$$

In questo caso l' equazione I ci dà :

$$x = \pm \sqrt{\frac{K}{M}},$$

che rappresenta un sistema di due rette parallele, le quali saranno reali od immaginarie, secondochè K sarà positiva o negativa; e che si confonderanno in una sola retta, quando sia $K=0$.

59. Discussione dell' equazione :

$$Ny^2 + 2Rx = 0. \quad (II)$$

Questa equazione non offre distinzione a farsi, imperocchè N può prendersi sempre positivamente, ed il segno del secondo termine non ha veruna influenza; giacchè se anche fosse negativo, basterebbe scambiare $-x$ con $+x$, ossia un semiasse

delle x coll' altro , per ottenere di nuovo la forma precedente. Ponendo $-\frac{2R}{N} = p$, l' equazione precedente acquista la forma semplice :

$$y^2 = px : \quad (27)$$

dalla quale si ottiene $y = \pm \sqrt{px}$. Questa equazione offre valori reali di y per quei soli valori di x che abbiano lo stesso segno di p ; quindi la curva da essa rappresentata giacerà da un solo lato dell' asse delle y . Ponendovi $x = 0$, sarà $y = 0$, e quindi la curva passa per l' origine. Per ogni valore di x che abbia lo stesso segno di p , l' equazione (27) darà due eguali ed opposti valori di y , i quali andranno crescendo con x all' infinito. La curva dunque (fig. 24) si comporrà di due rami che dall' origine si estenderanno nel senso delle x positive o negative (secondochè p sarà positiva o negativa) , e giaceranno simmetricamente all' asse dell' x , dal quale andranno sempre più allontanandosi : questa curva si nomina parabola.

Il punto A , in cui la parabola è intersecata dal suo diametro principale , dicesi vertice , asse il diametro principale AX , e parametro della parabola la costante p , la quale è coefficiente di x nell' equazione (27) , riferita al diametro principale come asse delle x ed al vertice come origine.

Componendo insieme i risultamenti ottenuti negli ultimi due numeri , si perviene alla conseguenza che da una equazione del 2° grado tra due variabili non vengon fuori che tre sole linee curve ; la ellisse , l' iperbole e la parabola , che perciò comporranno le sole linee del 2° ordine , e nelle quali è contenuto il cerchio come caso particolare dell' ellisse.

Del resto , l' equazione potrà ammettere ancora ogni altro significato geometrico ; essa potrà rappresentare un punto , una retta , due rette parallele , o in fine due rette che s' intersecano.

Le suddette curve portano ancora il nome di sezioni coniche , perchè risultano dall' intersezione di un cono con un piano.

40. La risposta alla quistione : quale delle tre curve sarà luogo geometrico di una data equazione del 2° grado con determinati coefficienti , si riduce ad un semplice contrassegno.

Se l' equazione (1) deve rappresentare una parabola , dovrà esser $B^2 - AA' = 0$, imperocchè sotto questa condizione soltanto il luogo dell' equazione (1) non ammetterà centro (n° 32 b) ;

daltronde la parabola è l'unica curva del 2° ordine, la quale non ha centro — Se oltracciò sia ancora $A'C = BC'$, ovvero $C=C'=0$, l'equazione (1) esprimerà due rette parallele od una sola (n° 32 c); ed in conseguenza questi luoghi saranno ancora considerati come variazioni della parabola, la quale con facilità può esservi ridotta anche geometricamente.

Ma se l'equazione (1) debba appartenere ad un'ellisse od iperbole, dovrà $B^2 - AA'$ esser diversa da zero; essendochè sotto questa condizione soltanto esiste un centro unico. Le due curve poi differiscono in questo, che la prima possiede due assi reali, uno soltanto ne ha la seconda. Or questi assi vogliamo esprimere in funzioni immediate dei coefficienti dell'equazione (1).

È noto (n° 33) che questa equazione, quando riponiamo l'origine nel centro, assume la forma:

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy = K,$$

in cui il valore di K sarà dato dalle equazioni (7) e (9).

Congiungendo questa equazione all'altra, $y = mx$, la quale esprime una retta menata per l'origine (il centro), avremo rispetto alle coordinate dei punti d'intersezione le espressioni:

$$x^2 = \frac{K}{A + A'm^2 + 2Bm}, \quad y^2 = \frac{m^2 K}{A + A'm^2 + 2Bm},$$

e per loro distanza dal centro:

$$R^2 = x^2 + y^2 = \frac{K(m^2 + 1)}{A + A'm^2 + 2Bm}. \quad (\alpha)$$

Or egli è chiaro che R si confonderà con un semiasse, quando avremo fatto coincidere la retta $y = mx$ con un diametro principale, e che in conseguenza la quantità m , da cui dipende la direzione di R , sia determinata in modo da render soddisfatte le equazioni (17):

$$A'm + B = ms, \quad A + Bm = s.$$

Ma moltiplicando la 1ª di queste due equazioni per m , indi aggendovi la seconda, si ottiene:

$$A + A'm^2 + 2Bm = s(m^2 + 1);$$

donde mercè l'equazione (α) risulta:

$$R = \sqrt{\frac{K}{s}}.$$

La quale ci darà i valori dei due semiassi, quando vi avremo sostituito i due valori della quantità sussidiaria s :

$$s = \frac{1}{2}(A + A') \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A - A')^2 + 4B^2},$$

risultanti dalle equazioni (17) mercè l'eliminazione di m ; e ce li darà in forma reale od immaginaria, secondochè il quoziente $K : s$ sarà positivo o negativo. E da ciò segue immediatamente che rispetto all'ellisse, i due valori di s debbono esser presi con segni identici, e quanto all'iperbole con segni opposti; e poichè in fine il valore di s , corrispondente al segno superiore, è necessariamente positivo, così per l'ellisse dovrà esser:

$$\sqrt{(A - A')^2 + 4B^2} < A + A', \text{ cioè } B^2 - AA' < 0$$

ossia negativo, e per l'iperbole sarà $B^2 - AA' > 0$, ossia positivo.

Del resto l'ellisse diviene immaginaria, quando K è negativa, poichè saranno allora immaginari i due valori di R : essa degenera in un cerchio, quando i due valori di s sono eguali, ed in conseguenza $A = A'$ e $B = 0$, finalmente in un punto, se $K = 0$. Il cerchio ed il punto sono dunque varietà dell'ellisse.

Quando $B^2 - AA' > 0$, sia K positiva o negativa, il luogo dell'equazione (1) sarà un'iperbole, la quale, quando sia $K = 0$ si trasformerà in un sistema di due rette che s'intersecano.

Noi chiameremo $B^2 - AA'$ binomio caratteristico di una equazione del 2° grado.

41. Le equazioni dell'ellisse ed iperbole assumono una forma rimarchevole, quando vi si prenda un vertice per origine, ed il diametro che vi è condotto per asse delle ascisse, quale appunto è il caso dell'equazione della parabola, $y^2 = px$.

Essendo

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

L'equazione al centro dell'ellisse, segue che volendo assumere per origine il vertice a sinistra A (fig. 22) dovremo sostituire $x - a$ ed x ; ed avremo per equazione al vertice:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2. \quad (29)$$

Rispetto poi all'iperbole trasporteremo l'origine nel vertice a destra A (fig 23) : e perciò sostituiremo $x + a$ ad y nell'equazione al centro :

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 ;$$

ed avremo per equazione al vertice dell'iperbole :

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2. \quad (30)$$

Se poniamo $\frac{2b^2}{a} = p$, le due equazioni prenderanno la forma

$$y^2 = px \mp \frac{p}{2a} x^2, \quad (31)$$

nella quale il segno superiore corrisponderà all'ellisse, l'inferiore all'iperbole.

Se in questa equazione, lasciando inalterata p , si rende a infinitamente grande (quindi anche b a cagione di $b = \sqrt{\frac{ap}{2}}$) essa si trasformerà in $y^2 = px$, vale a dire nell'equazione della parabola; donde segue che la parabola può esser considerata come un ellisse o iperbole, il cui asse maggiore e per l'una, reale per l'altra, sia divenuto infinitamente grande.

Ponendovi ancora $\mp \frac{b^2}{a^2} = \mp \frac{p}{2a} = q$, si vede come le tre curve possono esser rappresentate dalla sola e medesima equazione

$$y^2 = px + qx^2,$$

la quale apparterrà ad una parabola, ellisse o iperbole, secondochè q sarà nullo, negativo o positivo.

La quantità $p = \frac{2b^2}{a}$, per analogia alla parabola, porta nell'ellisse ed iperbole il nome di parametro, il quale è costituito dalla terza proporzionale geometrica in ordine a $2a$ e $2b$; imperocchè si ha :

$$p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b \cdot 2b}{2a}.$$

Finalmente dall'equazione (31) dell'ellisse ed iperbole deriva ancora che queste due curve in vicinanza del loro vertice tanto più si confonderanno in una parabola di egual parametro, per quanto a sarà più grande; vale a dire che esse tanto più si distenderanno insieme, come limitandosi ai piccoli valori di x il termine $\frac{px^2}{2a}$ sarà tanto più trascurabile rispetto a px per quanto a sarà più grande.

42. È noto che una curva del 2° ordine non può esser tagliata da una linea retta in più di due punti. Dal che segue che una curva di questa specie potrà immaginarsi prodotta mercè l'intersezione di una retta mobile con un cerchio, il cui diametro sia continuamente variabile. Cerchiamo di esprimere ciò analiticamente, appoggiandoci a questo modo di generazione delle curve del 2° ordine.

A tale obbietto immaginiamo già costruita la curva (1), e da qualsivoglia punto α, β , come centro, descritto un cerchio di diametro R ,

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2. \quad (m)$$

Questo in generale taglierà la curva in quattro punti, di cui consideriamo soltanto due, pei quali conduciamo la secante:

$$y = ax + c. \quad (n)$$

Egli è chiaro che ad ogni cerchio da descriversi con un determinato diametro corrisponderà una determinata posizione della retta mobile: quindi è che a e c dovranno essere funzioni del diametro R .

Essendo arbitrarie le coordinate α, β del centro del cerchio, noi stabiliremo la posizione di questo punto (e che ciò sia possibile si vedrà chiaramente dalle cose seguenti) in modo che la retta mobile resti sempre parallela a se stessa; con ciò da un lato il punto α, β otterrà una posizione interamente definita rispetto alla curva, dall'altra nell'equazione della retta (n) la sola c sarà variabile e dipendente da R . Ponendo dunque $c = \psi R$, l'equazione della retta diverrà: $y = ax + \psi R$; e se da questa equazione e da quella (m) del cerchio elimineremo R , avremo tra x ed y l'equazione: $y - ax = \psi \sqrt{(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2}$, ovvero:

$$\varphi(y - ax) = \sqrt{(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2}, \quad (p)$$

la quale chiaramente appartiene a tutti i punti d' intersezione della retta mobile col cerchio descritto da α , β .

A determinare la forma della funzione φ serve la condizione che il luogo geometrico di questi punti d' intersezione dev'essere una linea di 2° ordine, e che in conseguenza l' equazione (p) dev'esser algebrica e di 2° grado; donde poi segue che φ può essere soltanto una funzione algebrica lineare di $y - ax$, e quindi dovrà avere la forma;

$$\varphi(y - ax) = m(y - ax) + n,$$

in cui m ed n rappresentano due costanti arbitrarie. Introducendo invece due altre costanti b e k , le quali siano unite con m ed n mercè le equazioni:

$$m = \frac{k}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad n = -mb,$$

l' equazione (p) si trasformerà in:

$$k \frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \sqrt{(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2} \quad (33)$$

Essendo questa un' equazione di 2° grado con cinque costanti arbitrarie, sarà la più generale dello stesso grado tra due variabili; imperocchè l' equazione (1) ancora non contiene che cinque costanti arbitrarie, come si vedrà immediatamente dividendo tutta l' equazione per uno qualunque dei coefficienti, per F , a modo di esempio.

Da ciò risulta per un lato che tutte le linee di 2° ordine possono realmente esser generate nel modo supposto, per un altro poi ne deriva una rimarchevole proprietà di esse linee. Ed in vero, ponendo:

$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}} = d, \quad \sqrt{(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2} = r,$$

segue da (33):

$$kd = r, \text{ cioè } r : d = k : 1 :$$

Ma r è la distanza di un punto x, y della curva dal punto fisso α, β ; d la distanza perpendicolare dello stesso punto x, y

della curva da una retta fissa, la cui equazione è $y = ax + b$; dalla precedente proporzione segue dunque il teorema :

Le linee del second'ordine hanno la proprietà, che le distanze di ogni loro punto da un punto fisso e da una retta fissa sono nella ragione costante di $k : 1$.

La linea fissa si nomina direttrice, il punto fisso fuoco della curva ; e raggio vettore la retta menata dal fuoco a qualsivoglia punto della curva.

Svolgendo l'equazione (33) e portandola alla forma dell'equazione (1), si troverà pel binomio caratteristico l'espressione :

$$B^2 - AA' = 4(k^2 - 1)(a^2 + 1)^2,$$

il cui segno dipenderà da quello del fattore $k^2 - 1$. Quindi è che l'equazione (33) apparterrà ad un'ellisse, iperbole o parabola, secondochè sarà $k < 1$, > 1 , ovvero $= 1$.

L'equazione (33) comporta una semplicissima costruzione. Essendo dati gli assi coordinati OX , OY (fig. 21), si costruiscano primieramente la direttrice UU' ($y = ax + b$) ed il fuoco $F(x, \beta)$. Per questo punto si meni DV perpendicolare ad UU' ; e la distanza DF del fuoco dalla direttrice, divisa nel punto A in modo, che sia $AF : AD = k : 1$, sarà A un punto della curva. Per averne altri punti ancora, si conduca per un punto qualunque α della DV la zz' perpendicolare a DV , si cerchi la quarta proporzionale r in ordine ad 1 , k e $D\alpha = d$, ed i punti M ed M' , in cui il cerchio descritto con r come diametro taglierà la zz' , apparterranno alla curva.

Del resto dalla simmetria dell'ellisse ed iperbole rispetto al loro centro segue che queste curve hanno due direttrici e due fuochi, i quali stanno simmetricamente ai due lati del centro.

43. L'equazione (33) diverrà più semplice, quando si prenda una direttrice UU' per asse delle ordinate, e per asse delle ascisse la perpendicolare DV menata pel fuoco; con ciò si avrà chiaramente $b = \beta = 0$, $a = \infty$. Così facendo l'equazione (33), dopo averla elevata a quadrato, si troverà trasformata nella seguente:

$$k^2 x^2 = y^2 + (x - \alpha)^2, \quad (34)$$

in cui α rappresenta la distanza del fuoco dalla direttrice.

Si potrà profittare di quest'equazione per ottenere degli schia-

rimenti sul luogo delle direttrici e dei fuochi. Ed in vero, mancando in (34) il termine in y a 1^a potenza, l'asse delle x si confonderà con un diametro principale: le direttrici dunque stanno perpendicolarmente ad un diametro principale della curva, sul quale giacciono ancora i fuochi. Questo diametro principale è nella parabola evidentemente il suo asse; nell'iperbole poi sarà l'asse primario, giacchè questo è tagliato dalla curva in due punti, i vertici, poi quali dall'equazione (34), ponendovi $y=0$, si hanno le ascisse reali:

$$x_1 = \frac{\alpha}{1+k}, \quad x_2 = \frac{\alpha}{1-k}.$$

In fine, essendo rispetto all'ellisse la lunghezza di un semiasse $\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{\alpha k}{1-k^2}$, e l'ascissa del centro $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{\alpha}{1-k^2}$; questo valore sostituito ad x in (34), ci darà per valore dell'altro semiasse $\frac{\alpha k}{\sqrt{1-k^2}}$. Ma questo è minore di $\frac{\alpha k}{1-k^2}$, poichè si ha $1-k^2 < 1$; i fuochi stanno dunque sull'asse maggiore dell'ellisse.

Ponendo $x=0$ in (34) si ha $y=\sqrt{-\alpha^2}$ per pruovare che le direttrici non sono intersecate dalla curva; quindi rispetto all'ellisse esse stanno fuori della curva; e quanto all'iperbole esse si trovano tra i due vertici, e propriamente ciascuna direttrice col fuoco corrispondente è da ciascun lato del centro.

44. Trasportando l'origine in un vertice A, ed all'uopo ponendo in (34) $x+x_1=x+\frac{\alpha}{1+k}$ in vece di x , si avrà qual equazione al vertice per le curve del 2° ordine:

$$y^2 = 2\alpha kx + (k^2 - 1)x^2, \quad (35)$$

la quale ha la stessa forma delle equazioni (29) a (32) del n° 41, e si rapporta, come abbiamo veduto nel n° precedente, al medesimo sistema di assi coordinati. Queste equazioni sono dunque immediatamente comparabili tra loro, e si ha:

$$\alpha k = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}, \quad 1 - k^2 = \pm \frac{b^2}{a^2},$$

in cui p rappresenta il parametro, ed il segno superiore (sempre

come per lo innanzi) si riferisce all' ellisse, e l' inferiore all' iperbole. Quindi si trova :

per l' ellisse , ponendo per brevità $\sqrt{a^2 - b^2} = e$:

$$a = \frac{b^2}{e}, k = \frac{e}{a} \text{ ed } a = \frac{ak}{1 - k^2}, b = \frac{ak}{\sqrt{1 - k^2}};$$

per l' iperbole , ponendo per brevità $\sqrt{a^2 + b^2} = e$:

$$a = \frac{b^2}{e}, k = \frac{e}{a} \text{ ed } a = \frac{ak}{k^2 - 1}, b = \frac{ak}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

1) Tanto per l' ellisse che per l' iperbole (*fig. 22 e 23*) si ha $AF + k \cdot AD = k(a - AF)$, quindi $AF = \frac{ak}{1 + k}$. Ponendo questo valore di x in (35), ne viene $y = ak = \frac{p}{2}$; dunque la grandezza $p = \frac{2b^2}{a}$, introdotta nelle due curve sotto il nome di parametro, pareggia la doppia ordinata EE' condotta pel fuoco.

2) Si ha inoltre $CF = AC \mp AF = a \mp AF$; ma $AF = \frac{ak}{1 + k} = \frac{b^2}{a + e} = \pm \frac{a^2 - e^2}{a + e} = \pm (a - e)$; dunque $CF = e$. In conseguenza la grandezza $e = \sqrt{a^2 \mp b^2}$, precedentemente introdotta, rappresenta la distanza del fuoco dal centro, e nomasi eccentricità. Questa, come è chiaro, sarà nell' ellisse sempre minore e nell' iperbole sempre maggiore di a , la quale è rispettivamente semiasse maggiore o semiasse primario. In conseguenza della relazione $e^2 = a^2 \mp b^2$ i due semiassi insieme all' eccentricità formano un triangolo rettangolo, dimodochè ciascuna di queste tre quantità può facilmente costruirsi quando le altre due son date.

3) Essendo $CD = CF \pm DF = e \pm a = e \pm \frac{b^2}{e} = \frac{a^2}{e}$, sarà nelle due curve la distanza della direttrice dal centro 3^a proporzionale geometrica in ordine ad e ed a .

4) Sia M un punto qualunque dell' ellisse od iperbole, $CP = x$ la sua ascissa a contare dal centro C , $FM = r$ ed $F'M = r'$ i suoi raggi vettori, sarà $FM = k \cdot PD$, $F'M = k \cdot PD'$; vale a dire :

$$r = k(x \pm CD), \quad r' = k(CD \mp x).$$

Ponendo per k e CD i valori $\frac{e}{a}$ ed $\frac{a^2}{e}$, si avrà:

$$\text{per l'ellisse: } r = a + \frac{e}{a}x, \quad r' = a - \frac{e}{a}x; \quad (36)$$

$$\text{per l'iperbole: } r = \frac{e}{a}x - a, \quad r' = \frac{e}{a}x + a; \quad (37)$$

e per mezzo di queste equazioni i raggi vettori di un punto della curva sono espressi in funzione razionale della corrispondente ascissa, contata dal centro.

5) Addizionando le equazioni (36) si ha $r + r' = 2a$, vale a dire che la somma dei raggi vettori per ciascun punto dell'ellisse è costante ed eguale all'asse maggiore.

Mercè questa proprietà è dunque l'ellisse il luogo geometrico dei vertici di tutti i triangoli che costruiti sopra una data base $2c$, hanno la somma degli altri due lati eguale ad una grandezza costante $2a$.

6) Sottraendo le equazioni (37), si otterrà $r' - r = 2a$, vale a dire che la differenza dei raggi vettori di qualsivoglia punto dell'iperbole è costante ed eguale all'asse primario.

In conseguenza di questa proprietà fondamentale l'iperbole è il luogo geometrico dei vertici di tutti i triangoli che sopra una data base $= 2c$ sono costruiti in modo che la differenza degli altri due lati sia eguale ad una quantità costante $= 2a$.

È cosa assai facile dedurre da queste principali proprietà le equazioni delle due curve.

7) La quantità $k = \frac{e}{a}$ non è altra cosa, come è chiaro, che il rapporto dell'eccentricità al semiasse maggiore o semiasse primario, e diviene espressione della stessa eccentricità, quando si ponga $a = 1$; essa può costituire l'eccentricità numerica in opposizione ad e che ne rappresenta il valore lineare. Sostituendo il valore di $b^2 = \pm(a^2 - e^2) = \pm a^2(1 - k^2)$ nelle equazioni al centro (24) e (26) dell'ellisse ed iperbole, nella prima col segno superiore, nell'ultima coll'inferiore, si avrà:

$$y^2 = (1 - k^2)(a^2 - x^2) \quad (38)$$

come equazione al centro dell' ellisse o iperbole , secondochè si porrà $k < 1$ o pure > 1 .

8) Rispetto alla parabola si ha da (35) , a cagione di $k=1$, l'equazione $y^2 = 2xx$, la quale comparata coll' equazione (32), in cui è da porsi $q=0$, somministra la relazione $p=2x$. Il parametro p della parabola è dunque eguale al doppio della distanza del fuoco dalla direttrice , ovvero a quattro volte la distanza del fuoco dal vertice , imperocchè essendo $k=1$, è $AF = AD = \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{4} p$. (fig. 24).

Ponendo $x = AF = \frac{1}{2} \alpha$ in $y^2 = 2xx$, ne avviene :

$$y = \pm \frac{1}{2} p,$$

donde segue che anche nella parabola il parametro è eguale alla doppia ordinata EE' eretta nel fuoco.

In fine pel raggio vettore $FM = r$ di un punto qualunque M della parabola si ha : $FM = PD = AD + AP$, ossia :

$$r = \frac{1}{4} p + x. \quad (39)$$

La parabola è il luogo geometrico di tutti i punti che sono egualmente lontani da una retta fissa , la direttrice , e da un punto fisso , il fuoco ; dalla quale proprietà può dedursi facilmente l'equazione della curva :

CAPO QUINTO.

DI ALCUNE PIU' RILEVANTI PROPRIETA' DELLE LINEE
DEL SECONDO ORDINE.

I. L' ellisse. *

43. A svolgere le proprietà di questa curva ci serviremo della sua equazione al centro :

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 , \quad (1)$$

in cui a e b dinotano i semiassi maggiore e minore , e le ascisse sono contate sul primo.

S' indichi con e l'eccentricità lineare, ossia la distanza del fuoco dal centro, $CF = CF'$ (fig. 22), con ε il rapporto di essa all'asse maggiore, ossia l'eccentricità numerica; è noto che sarà:

$$e^2 = a^2 - b^2, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad b^2 = a^2 - e^2 = a^2(1 - \varepsilon^2),$$

e pei raggi vettori $FM = r$, $F'M = r'$ di un punto qualunque M dell'ellisse, corrispondente all'ascissa x , si avranno le espressioni:

$$r = a - \frac{e}{a} x, \quad r' = a + \frac{e}{a} x,$$

la cui somma è uguale all'asse maggiore $2a$. E su questa proprietà è fondato il noto metodo di descrivere l'ellisse per punti.

Dando all'equazione (1) la forma: $a^2 y^2 = b^2 (a^2 - x^2)$, ovvero:

$$\frac{y^2}{(a-x)(a+x)} = \frac{b^2}{a^2},$$

ed osservando che $a - x = A'P$ ed $a + x = AP$ sono i segmenti, in cui l'asse maggiore è diviso dall'ordinata y , si vede come essa esprima il teorema: il quadrato dell'ordinata di un punto dell'ellisse è al rettangolo delle distanze del piede di essa dai punti estremi dell'asse maggiore nella ragione costante di $b^2 : a^2$.

Dei due cerchi, che si possono descrivere sugli assi maggiore e minore dell'ellisse come diametri, chiameremo il primo cerchio circoscritto, ed inscritto il secondo. Or siano (fig. 25) $y = MP$, $y' = M'P$ le ordinate corrispondenti ad una medesima ascissa $OP = x$, l'una per ellisse e l'altra pel cerchio circoscritto;

sarà $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$; quindi $y : y' = b : a$, vale a dire che: le ordinate corrispondenti ad una medesima ascissa dell'ellisse e del cerchio circoscritto, sono nella costante ragione di $b : a$.

E nello stesso modo si troverà che le ascisse, corrispondenti ad una medesima ordinata dell'ellisse e del cerchio inscritto, sono nella ragione costante di $a : b$.

Da ciò segue che si avranno punti dell'ellisse, sia diminuendo le ordinate del cerchio circoscritto nella ragione di $a : b$, sia accrescendo quelle del cerchio inscritto nella ragione di $b : a$; ed a questa considerazione si appoggia il seguente modo di costru-

re l'ellisse. Ad un punto qualunque M' del cerchio circoscritto si conduca il raggio OM' , il quale taglierà il cerchio iscritto in un punto N : per questo punto si conduca una parallela all'asse maggiore, la quale taglierà l'ordinata del punto M' in un punto M che appartenerà all'ellisse.

46. Problema. Una linea retta DE (fig. 25) di data lunghezza si muove in modo da scorrere coi punti estremi su i lati di un angolo retto XOY ; si cerca l'equazione della curva descritta da un dato punto M della retta.

Si prendano ad assi delle x ed y i lati dell'angolo retto, si pongano le distanze costanti $DM = a$, $EM = b$, indi $OP = x$, $MP = y$: avremo in ogni posizione della retta DE :

$$\overline{MP}^2 : \overline{ME}^2 = \overline{GD}^2 : \overline{DM}^2 ;$$

ossia

$$y^2 : b^2 = (a^2 - x^2) : a^2 ;$$

quindi

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 .$$

Il punto M descriverà dunque un'ellisse, i cui semiassi saranno a e b . Ed è chiaro che ogni altro punto situato sul prolungamento di DE descriverà ancora un'ellisse.

Quindi deriva il seguente metodo di costruire l'ellisse per punti. Da un punto D , preso a piacere su uno degli assi, p. e. BB' , e col raggio $DE = a + b$ descrivasi un cerchio, il quale intersecherà l'altro asse in due punti E, E' ; si conducano DE, DE' , e si prenda $DM = DM_1 = a$; M ed M_1 saranno punti dell'ellisse.

Ne segue ancora il mezzo di descrivere l'ellisse con movimento continuo. Facendo scorrere gli estremi D ed E di una riga DE su i lati di un angolo retto, un qualunque punto della DE , al quale siasi fermata una punta scrivente segnerà un'ellisse (ellissografo).

Delle tangenti all'ellisse.

47. Congiungiamo l'equazione di una retta:

$$y = mx + n \tag{1}$$

con quella dell'ellisse: $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$; ne avremo mercé l'eliminazione di y l'equazione:

$$(a^2 m^2 + b^2) x^2 - 2x^2 m n x + a^2 (n^2 - b^2) = 0,$$

donde otterremo per le ascisse dei punti d' intersezione i valori:

$$x = \frac{-a(amn \pm b\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2})}{a^2m^2 + b^2}$$

L' ellisse dunque sarà incontrata dalla retta in due punti , o in nessuno, secondochè sarà $a^2m^2 + b^2 - n^2 > 0$ o < 0 . E la segante, quando i due punti d' intersezione si confonderanno in un solo, diverrà una tangente; per la qual cosa richiedesi che il radicale sparisca nella precedente espressione di x .

In conseguenza sarà :

$$a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0 \quad (2)$$

l' equazione di condizione pel contatto della retta (1) coll' ellisse. Ed avendo a ciò riguardo , avremo come coordinate del punto di contatto :

$$\xi = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 + b^2}, \quad \eta = \frac{b^2n}{a^2m^2 + b^2}$$

Or se con queste equazioni determiniamo i valori di m ed n , otterremo :

$$m = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}, \quad n = \frac{b^2}{\eta};$$

e saranno questi i valori che dovranno avere le costanti m ed n , affinchè la retta (1) tocchi l' ellisse in un punto ξ, η . I quali valori sostituiti in (1) ci daranno :

$$y = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}x + \frac{b^2}{\eta},$$

ovvero, sottraendo da questa equazione l' altra: $\eta = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}\xi + \frac{b^2}{\eta}$, la quale esprime che ξ, η è un punto della tangente ,

$$y - \eta = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}(x - \xi), \quad (3)$$

che sarà l' equazione della tangente all' ellisse nel punto ξ, η . Si compari questa equazione (dopo averne cacciato il denominatore $a^2\eta$) coll' equazione $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, e si avrà :

$$a^2\eta y + b^2\xi x = a^2b^2, \quad (4)$$

ch'è una forma più simmetrica dell'equazione della tangente, e che differisce da quella dell'ellisse per la sostituzione dei rettangoli ηy e ξx ai quadrati y^2 ed x^2 . L'angolo τ che la tangente al punto ξ , η forma coll'asse delle ascisse sarà dato dall'equazione:

$$\operatorname{tg} \tau = - \frac{b^2 \xi}{a^2 \eta}. \quad (5)$$

La perpendicolare menata alla tangente pel punto M di contatto, dicesi normale della curva nel punto M. Ed avendo riguardo all'equazione (3), l'equazione della normale dell'ellisse nel punto ξ , η sarà:

$$y - \eta = \frac{a^2 \eta}{b^2 \xi} (x - \xi). \quad (6)$$

48. Siano (fig. 26) MT ed MN la tangente e normale al punto M (ξ , η); le parti PT e PN dell'asse delle ascisse, comprese tra il piede dell'ordinata del punto di contatto ed i punti in cui l'asse è incontrato dalla tangente e normale, si dicono sottotangente e sottonormale. Le parti MT ed MN della tangente e normale, tra il punto di contatto ed i punti in cui queste rette incontrano l'asse delle x , sogliono ricevere in istretto senso i nomi di tangente o normale.

Per ottenere le espressioni delle lunghezze di queste quattro linee, poniamo $y = 0$ nelle equazioni (3) e (6) della tangente e normale. (n° 47); con ciò x rappresenterà rispettivamente le ascisse dei punti T ed N, ed essendo $\xi = OP$, avremo:

$$x - \xi = PT = \text{Sottotangente} = \frac{a^2 \eta^2}{b^2 \xi} = \frac{a^2 - \xi^2}{\xi},$$

$$x - \xi = PN = \text{Sottonormale} = - \frac{b^2 \xi}{a^2};$$

nelle quali due espressioni i segni opposti dipendono dall'esser le due linee sempre situate negli opposti lati della normale, da cui cominciano a contarsi. Mercè queste espressioni si avrà poi dai triangoli rettangoli MPT ed MPN:

$$MT = \text{Tangente} = \frac{\eta}{b^2 \xi} \sqrt{b^4 \xi^2 + a^4 \eta^2} = \frac{a \eta}{b \xi} \sqrt{a^2 - \xi^2},$$

$$MN = \text{Normale} = \frac{1}{a^2} \sqrt{b^4 \xi^2 + a^4 \eta^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2}.$$

Osservando che l'espressione della sottotangente è indipendente da b ed η , e che in conseguenza per una stessa ξ avrà lo stesso valore in tutte le ellissi descritte sul medesimo asse maggiore, si ottiene un modo semplice di costruire la tangente. Sull'asse maggiore come diametro si descriva un cerchio; si prolunghi l'ordinata del punto di contatto M fino ad incontrare la circonferenza in M' ; per questo punto si meni una tangente al cerchio; e congiunto il punto T , in cui essa taglia l'asse delle ascisse, col punto M dato sull'ellisse, sarà TM la tangente richiesta.

Mentre la sottotangente, come facilmente si rileva dalla sua espressione, può ricevere tutti i valori da 0 a $\pm\infty$, non avviene altrettanto della sottonormale; la quale diviene nulla per $\xi = 0$, poichè in questo caso la normale confondendosi coll'asse minore, i punti P ed N coincideranno col centro; col crescere di ξ la sunnormale si aumenta ancora, e ponendo $\xi = a$ essa perviene al suo valore massimo $\frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}$ al semiparametro, come limite che non può superare.

49. Or supponiamo dato fuori dell'ellisse il punto $K(x', y')$, (fig. 27); e da questo si voglia condurre una tangente all'ellisse. — Indicando con ξ, η le coordinate tuttavia incognite del punto di contatto, sarà:

$$a^2\eta y + b^2\xi x = a^2b^2$$

l'equazione della tangente; e così per la determinazione di ξ ed η avremo le due equazioni:

$$a^2\eta^2 + b^2\xi^2 = a^2b^2 \dots 1), \quad a^2\eta y' + b^2\xi x' = a^2b^2 \dots 2),$$

la prima delle quali esprime che il punto ξ, η giace sull'ellisse, e la seconda che x', y' dev'essere un punto della tangente. Donde per mezzo di successiva eliminazione otterremo:

$$\xi = \frac{a^2(b^2x' \pm y' \sqrt{N})}{a^2y'^2 + b^2x'^2}, \quad \eta = \frac{b^2(a^2y' \mp x' \sqrt{N})}{a^2y'^2 + b^2x'^2},$$

in cui per ragione di brevità si è fatta $N = a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2$, ed i segni superiori ed inferiori si corrispondono insieme. Supponendo N positiva, vale a dire che il punto x', y' sia dato fuori dell'ellisse, vi si potranno, a cagione del doppio segno, menare due tangenti alla curva; e quanto all'angolo τ ch'esse fa-

ranno coll'asse dell'ascisse avremo :

$$\operatorname{tg} \tau = - \frac{b^2 \xi}{a^2 \eta} = - \frac{x' y' \pm \sqrt{a^2 y'^2 + b^2 x'^2 - a^2 b^2}}{a^2 - x'^2}$$

Nell'ipotesi di $N = 0$ i precedenti valori di ξ ed η si riducono a $\xi = x'$, $\eta = y'$, come dev'essere, imperocchè stando in questo caso il punto x' , y' sull'ellisse, esso stesso sarà di punto contatto.

Per costruire la tangente nel modo più semplice servono i luoghi geometrici dell'equazioni (1) e (2), essendochè i loro punti d'intersezione sono precisamente i punti di contatto.

Ora il luogo geometrico dell'equazione (1) è l'ellisse stessa, ch'è data; e quello dell'equazione (2) è una linea retta, i cui punti d'intersezione D ed E coi due assi si costruiscono facilmente, imperocchè dall'equazione (2) si ha che :

$$\text{per } \eta = 0; \xi = OD = \frac{a^2}{x'}, \quad \text{per } \xi = 0: \eta = \frac{b^2}{y'};$$

conducendo pei punti D ed E una retta, questa taglierà l'ellisse nei punti G e G' che saranno i richiesti punti di contatto.

La retta GG', che passa pei due punti di contatto, G e G', dicesi corda dei contatti. E poichè il valore di OD è indipendente dall'ordinata RK = y' del punto K, ha luogo il teorema:

Se da punti qualunque K, K', ecc. di una retta NN' perpendicolare all'asse maggiore, si conducono delle tangenti all'ellisse, tutte le corde dei contatti si taglieranno in un medesimo punto D dell'asse maggiore.

Il punto D e la retta NN', egualmente che pel cerchio, sono rispettivamente polo e polare.

Dall'espressione di OE seguirà egualmente che il punto E è polo rispetto alla retta QQ', dal punto K condotta perpendicolarmente all'asse minore. Come questi teoremi possono invertirsi, è per se stesso evidente; e più tardi (n° 59) noi perverremo a generalizzarli.

50. Conducendo il raggio OM (fig. 26) al punto di contatto M(ξ, η), e chiamando ψ l'angolo che farà coll'asse delle x , sarà $\operatorname{tg} \psi = \frac{\eta}{\xi}$; e questa equazione comparata, all'equazione (5), del n° 47 ci da :

$$tg\psi \cdot tg\tau = - \frac{b^2}{a^2} ;$$

donde segue che il prodotto $tg\psi \cdot tg\tau$ è quantità costante. Sia $\lambda = \text{OMT}$ l'angolo sotto cui il raggio menato al punto di contatto incontra la tangente, sarà a cagione di $\lambda = \tau - \psi$:

$$tg\lambda = \frac{tg\tau - tg\psi}{1 + tg\tau \cdot tg\psi} = - \frac{a^2 b^2}{\gamma \xi (a^2 - b^2)} = - \frac{a^2 (1 - e^2)}{e^2 \cdot \gamma \xi}.$$

È chiaro che sarà $tg\lambda = \infty$, ossia $\lambda = 90^\circ$ soltanto nel caso che sia nulla ξ o γ ; i punti estremi degli assi son dunque i soli, in cui la tangente sia perpendicolare al raggio corrispondente.

51. Siano ad un punto M dell'ellisse (*fig. 28*) condotte la tangente, la normale ed i due raggi vettori. Si avrà l'ascissa ON del punto d'intersezione N della normale coll'asse delle x , ponendo nell'equazione della normale [(6), n° 47] $y = 0$; donde:

$$x = \text{ON} = \frac{e^2}{a^2} \xi.$$

Or in quest'espressione lasciando crescere x da 0 fino ad a , $y = \text{ON}$ aumenterà ancora da 0 fino a $\frac{e^2}{a} < e$; e perciò la normale incontrerà l'asse maggiore sempre tra i due fuochi. Ma è:

$$\text{FN} = \text{OF} - \text{ON} = e - \frac{e^2}{a^2} \xi = \frac{e}{a} \left(a - \frac{e}{a} \xi \right) = \frac{er}{a},$$

$$\text{F'N} = \text{OF'} + \text{ON} = e + \frac{e^2}{a^2} \xi = \frac{e}{a} \left(a + \frac{e}{a} \xi \right) = \frac{er'}{a};$$

quindi:

$$\text{FN} : \text{F'N} = r : r' = \text{FM} : \text{F'M};$$

e considerando questa proporzione nel triangolo FMF', si ha per un noto teorema della geometria elementare che l'angolo formato dai due raggi vettori menati ad un punto qualunque dell'ellisse, è diviso per metà dalla normale condotta per l'istesso punto.

Quindi si hanno ancora i seguenti teoremi:

1) La tangente forma angoli eguali coi raggi vettori menati al punto di contatto.

2) La tangente divide per mezzo l'angolo FME, formato da uno dei raggi vettori, p. e. FM, e dal prolungamento dell'altro.

3) Prolungando un raggio vettore, p. e. FM, e facendo il prolungamento ME = FM = all'altro raggio vettore, si ha un triangolo isoscele, la cui base EF sarà divisa dalla tangente in parti eguali e ad angoli retti.

4) Congiungasi il punto K col centro O; sarà KO parallela ad FE, poichè essa divide per metà EF ed FF' nei punti K ed O; quindi KO: EF' = OF : FF', e poichè si ha F'E = FM + ME = 2a, sarà KO = a: similmente si dimostra esser K'O = a, se la FK' sia menata perpendicolarmente alla tangente. Donde segue che la distanza del centro dal piede della perpendicolare abbassata dal fuoco sopra una tangente, è costante ed eguale al semiasse maggiore; o in altri termini: il cerchio circoscritto è il luogo geometrico del piede della perpendicolare abbassata dal fuoco sulla tangente.

5) Pongasi l'angolo FTK = τ' , sarà FK = FT. sen τ' , ed F'K' = F'T sen $\tau' = (2e + FT)$ sen τ' . Or ponendo $y = 0$ nell'equazione della tangente, ne risulta $OT = \frac{a^2}{\xi}$, quindi $FT = \frac{a^2}{\xi} - e$ ed F'T = $\frac{a^2}{\xi} + e$; e poichè $tg \tau' = tg (180^\circ - \tau) = -tg \tau$, sarà :

$$\text{sen } \tau' = \frac{tg \tau'}{\sqrt{2 + tg^2 \tau'}} = \frac{b^2 \xi}{\sqrt{a^4 \tau'^2 + b^4 \xi^2}};$$

perciò

$$FK = \frac{b^2 (a^2 - e \xi)}{\sqrt{a^4 \tau'^2 + b^4 \xi^2}}, \quad F'K' = \frac{b^2 (a^2 + e \xi)}{\sqrt{a^4 \tau'^2 + b^4 \xi^2}};$$

quindi

$$FK.FK' = \frac{b^4 (a^4 - e^2 \xi^2)}{a^4 \tau'^2 + b^4 \xi^2} = \frac{b^4 [a^4 - (a^2 - b^2) \xi^2]}{b^4 [a^2 - (a^2 - b^2) \xi^2]} = b^2;$$

vale a dire che il prodotto delle perpendicolari abbassate dai due fuochi sopra una tangente, è costante ed eguale al quadrato del semiasse minore.

Dal teorema (3) deriva un comodo processo per costruire una tangente.

a) Se il punto M di contatto è dato. Si prolunghi uno dei raggi vettori, e sia F'M, della quantità ME = MF; e dai

punti E ed F descrivendo due archi di cerchio, che s'intersechino in un punto L, questo apparterrà alla tangente.

b) Menare una tangente da un punto L dato fuori dell'ellisse. Immaginando già costruita la tangente, si vede nel tempo stesso che il punto M di contatto sarebbe conosciuto, se si potesse determinare il punto E, essendochè la EF' taglia l'ellisse nel punto M. Ma il punto E è definito dalla note distanze $EL = FL$ ed $EF' = MF + MF' = 2a$. Quindi da uno dei fuochi, e sia F' (fig. 29) e col raggio $= 2a$ si descriva l'arco oo' , e dal punto dato L e colla distanza, che lo separa dall'altro fuoco, come raggio si descriva un secondo arco nn' che taglierà il primo nei punti E, E'; si congiungano questi punti con F', e le congiungenti intersecheranno l'ellisse nei richiesti punti di contatto M ed M'.

Dei diametri dell'ellisse.

52. Per le cose dette nel capo precedente è noto che nell'ellisse, qual curva di 2° ordine, a) per ogni sistema di corde parallele esiste un diametro che tutte le divide per metà; b) che tutti i diametri sono linee rette che passano pel centro; c) che reciprocamente ogni retta menata pel centro è un diametro, a cui corrisponde un sistema di corde parallele da esso diametro divise per metà.

Se l'ellisse è data col suo centro, è facilissima cosa costruire il diametro appartenente ad una data direzione di corde. Si dividerà in due parti eguali una delle corde date, e la congiungente il punto di divisione col centro sarà il diametro richiesto.

Sia φ l'angolo che di una delle corde parallele forma coll'asse delle x ; $y = x \operatorname{tg} \varphi + n$ ne sarà l'equazione, la quale unita a quella dell'ellisse: $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, e poi eliminatane la y , somministrerà l'altra equazione:

$$(a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2) x^2 + 2a^2 n \operatorname{tg} \varphi \cdot x + a^2 (n^2 - b^2) = 0,$$

le cui radici x_1 ed x_2 rappresenteranno le ascisse dei punti d'intersezione della corda coll'ellisse. Quindi disegnando con α , β le coordinate del punto medio della corda, si avrà:

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = - \frac{a^2 n \operatorname{tg} \varphi}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2}, \quad \beta = a \operatorname{tg} \varphi + n = \frac{b^2 n}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2}.$$

L'equazione del corrispondente diametro, come retta che passa per l'origine e pel punto $\alpha \beta$, sarà $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, ovvero, sostituendovi i precedenti valori di α e β :

$$y = - \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} \varphi} x. \quad (1)$$

Sia ψ l'angolo che questo diametro forma coll'asse delle x , sarà $\operatorname{tg} \psi = - \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} \varphi}$, donde:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = - \frac{b^2}{a^2}. \quad (2)$$

Dunque: il prodotto delle tangenti degli angoli che un diametro ed il corrispondente sistema di corde formano coll'asse maggiore, è costante ed $= - \frac{b^2}{a^2}$.

Dalla simmetria dell'equazione (2) rispetto agli angoli φ e ψ risulta immediatamente che conducendo un secondo diametro che faccia l'angolo φ coll'asse maggiore, il corrispondente sistema di corde vi farà l'angolo ψ .

Questi due diametri hanno dunque la proprietà, che ciascuno di essi divide per metà le corde parallele all'altro. Due diametri tali diconsi diametri coniugati; ed è facile a comprendersi come questa proprietà possa utilizzarsi per costruire il coniugato di un dato diametro.

L'equazione (2) evidentemente esprime la condizione cui debbono soddisfare gli angoli d'inclinazione φ e ψ di due diametri all'asse maggiore, affinchè essi facciano un sistema coniugato.

Poichè il prodotto $\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi$ è per l'equazione (2) sempre negativo, ne segue che dei due angoli φ e ψ , che due diametri coniugati fanno coll'asse maggiore, l'uno sarà sempre acuto e l'altro ottuso, e che in conseguenza ciascuno dei due diametri giace negli altri due quadranti ellittici. Ponendo che φ sia l'angolo acuto, sarà $\psi - \varphi = u$ l'angolo dei due diametri, intersecato dall'asse minore e si avrà:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi} = - \frac{a^2 \operatorname{tg} \varphi + b^2 \cot \varphi}{a^2 - b^2};$$

ed in conseguenza l'angolo u sarà sempre ottuso, e sempre a-

cuto l'altro intersecato dall'asse maggiore. Quest'ultimo è ordinariamente denominato angolo di conjugazione.

Se i due diametri debbono essere ad angolo retto, ossia $u=90^\circ$, dovrà esser $tg u = \infty$; il quale valore in forza della precedente espressione di $tg u$ non può aver luogo che nell'ipotesi di $\varphi=0$, o $\varphi=90^\circ$, essendochè nell'ellisse $a^2 - b^2$ è diversa da zero. Quindi gli assi costituiscono il solo sistema di diametri conjugati rettangolari (diametri principali) dell'ellisse. Pel cerchio poi, essendo $a=b$, si avrà $u=90^\circ$ per ogni valore di φ , ed in conseguenza nel cerchio ogni sistema di diametri conjugati è rettangolare.

55. Congiungendo i punti estremi di un diametro DD' (fig. 30) con qualsivoglia punto M dell'ellisse, le corde MD ed MD' , che ne risultano, si dicono corde supplementari. Or si dinotino con x', y' le coordinate del punto M , con x'', y'' quelle del punto D , saranno $-x'', -y''$ quelle di D' , e le equazioni delle corde MD , MD' saranno:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x'); \quad y - y' = \frac{y' + y''}{x' + x''} (x - x').$$

E se φ e ψ sono gli angoli che esse formano coll'asse maggiore riguardato come asse delle ascisse, risulterà da queste equazioni:

$$tg \varphi . tg \psi = \frac{y'' - y'^2}{x'' - x'^2}.$$

Ma i punti D , D' ed M essendo sull'ellisse, saranno soddisfatte le equazioni $a^2 y''^2 + b^2 x''^2 = a^2 b^2$, $a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$, dalle quali mercè sottrazione si ottiene $a^2 (y''^2 - y'^2) + b^2 (x''^2 - x'^2) = 0$, e con ciò l'equazione precedente si trasforma in:

$$tg \varphi . tg \psi = - \frac{b^2}{a^2}. \quad (n)$$

Laonde il prodotto $tg \varphi . tg \psi$ è costante, ed indipendente non solamente dalla posizione del punto M rispetto al diametro DD' , ma dalla direzione ancora di quest'ultimo. Quindi il teorema:

1) Menando pei punti estremi di qualunque diametro due rette, rispettivamente parallele a due corde supplementari, esse s'incontreranno in un punto dell'el-

lisse e formeranno una coppia di corde supplementari.

Dalla coincidenza della precedente equazione (n) coll'equazione (2) del n° precedente segue inoltre che:

2) Due diametri, paralleli a due corde supplementari, sono coniugati.

Questo teorema somministra ancora un mezzo per costruire il coniugato di un dato diametro DD'. Per un punto estremo di un altro diametro qualunque AA' si conduca la corda AN parallela a DD'; si congiunga N con A, e si conduca il diametro EE' parallelo ad AN, sarà EE' il coniugato di DD'.

Cerchiamo ancora di determinare l'angolo ANA' (fig. 31) formato dalle due corde supplementari AN, A'N; che supponiamo condotte dai punti estremi dell'asse maggiore. Siano x, y le coordinate del punto N; si avrà:

$$\operatorname{tg} NAX = -\frac{y}{a-x}, \quad \operatorname{tg} NA'X = \frac{y}{a+x};$$

quindi, essendo $\text{ANA}' = \text{NAX} - \text{NA'X}$, sarà:

$$\operatorname{tg} \text{ANA}' = -\frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2} = -\frac{2ab^2}{(a^2 - b^2)y} \quad (1)$$

mercè la sostituzione del valore di x^2 tratto dall'equazione della curva. E poichè rispetto all'angolo di cui si tratta, y può riguardarsi positiva, sarà $\operatorname{tg} \text{ANA}'$ essenzialmente negativa, ed in conseguenza l'angolo formato dalle due corde supplementari costruite sull'asse maggiore, sarà sempre ottuso. Il suo massimo valore corrisponderà ad $y = b$, vale a dire quando le sue corde s'incontreranno in un estremo dell'asse minore; e per questo massimo si avrà:

$$\operatorname{tg} \text{ABA}' = -\frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Col decrescere di y , l'angolo ANA' diverrà sempre più piccolo, e per $y = 0$ ha per limite l'angolo retto.

Similmente per l'angolo BNB' formato dalle due corde supplementari costruite sull'asse minore, si troverà:

$$\operatorname{tg} \text{BNB}' = \frac{2a^2b}{(a^2 - b^2)x}.$$

Questo angolo è dunque sempre acuto, e per $x = a$ prende il

suo valore minimo , pel quale si ha :

$$\operatorname{tg} BAB' = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Decrescendo x , l'angolo BNB' diviene sempre più grande , e perviene ad eguagliare un retto quando è $x = 0$.

Riunendo i due precedenti teoremi in un solo si perviene alla conseguenza , che l'angolo formato da due corde supplementari, o da due diametri conjugati, non può esser maggiore di ABA' , nè minore BAB' .

Del resto dalle equazioni (1) e (3) risulta chiaramente che su i due assi e quindi anche sopra ciascun diametro si possono costruire due coppie di corde supplementari le quali racchiudano angoli eguali. Quindi vi saranno ancora due sistemi di diametri conjugati di eguali angoli di conjugazione , eccetto però il sistema dei diametri principali conjugati , ossia degli assi.

54. Problema. 1. Data un'ellisse , si vuol costruire un sistema di diametri conjugati che comprendano un dato angolo γ . (fig. 32).

Si conducano due corde parallele e pei loro punti medii il diametro kk' , la cui divisione in due parti eguali ci darà primieramente il centro O . Sulla kk' si descriva il segmento circolare kBk' capace dell'angolo γ : si congiunga il punto d'intersezione B , dell'arco circolare coll'ellisse ; coi punti k e k' , e pel centro O si conducano parallelamente a Bk e Bk' le DD' ed EE' che saranno i due diametri richiesti.

Ma il cerchio taglia l'ellisse in un secondo punto B' , ed è noto che $kB'k' = 180^\circ - \gamma$; perciò conducendo kB' e $k'B'$, e parallelamente ad esse i diametri FF' e GG' , questi formeranno il secondo sistema di diametri conjugati che si taglieranno ancora sotto l'angolo γ .

E con ciò rimane anche risoluto il problema di costruire per un dato sistema di diametri conjugati il secondo sistema di eguale angolo di conjugazione.

Problema 2. Costruire gli assi di un'ellisse data.

Questo problema non è che un caso speciale del precedente , per $\gamma = 90^\circ$. Egli è chiaro che il cerchio deve descriversi dal

centro dell'ellisse sopra un diametro qualunque, e quindi procedere come per lo innanzi.

53. Ad un punto qualunque $M(x, y)$ dell'ellisse (*fig. 33*) si conducano la tangente TT' ed il diametro MN , si avrà per l'angolo d'inclinazione τ della tangente all'asse maggiore, preso per asse delle x : $tg\tau = -\frac{b^2x}{a^2y}$ [eq. (5), n° 47], e se φ è l'angolo d'inclinazione del diametro all'asse delle x , sarà $tg\varphi = \frac{y}{x}$; e moltiplicando le due equazioni, si avrà:

$$tg\varphi \cdot tg\tau = -\frac{a^2}{b^2},$$

donde, avendo riguardo all'equazione (2) del n° 52 segue che la tangente ad un punto qualunque dell'ellisse è parallela al conjugato del diametro menato al punto di contatto.

Ed essendo perciò parallele le tangenti menate pei punti estremi di un diametro, le quattro tangenti, condotte pei punti estremi di due diametri conjugati MN e PQ , formeranno un parallelogrammo $SS'TT'$.

L'ellisse riferita ad un sistema di diametri conjugati.

56. Finora abbiamo adoperato l'equazione dell'ellisse sotto la forma:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad (1)$$

la quale si appoggia, com'è noto, ad esser l'origine nel centro della curva, per la qual cosa si ottiene l'assenza dei termini lineari, e ad esser le corde, parallele ad uno degli assi coordinati, divise per metà dall'altro, donde viene la mancanza del termine in xy . Quindi è che l'equazione della curva non, renderà alterata la forma precedente, se conservando l'origine nel centro si scelga per assi coordinati un qualunque sistema di diametri conjugati.

Or sia OX, OY (*fig. 34*) un sistema di diametri conjugati presi per assi coordinati, e siano α, α' gli angoli che i nuovi assi OX, OY formano coll'asse maggiore; ad oggetto di ottenere una tras-

formata nella forma (1) dovremo scrivere $x \cos \alpha + y \cos \alpha'$ in vece di x , ed $x \sin \alpha + y \sin \alpha'$ in vece di y [eq. (1), n° 7], e con ciò otterremo:

$$(a^2 \sin^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha') y^2 + (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) x^2 + 2(a^2 \sin \alpha \sin \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha') xy = a^2 b^2.$$

Ma per la nota relazione [eq. (2), n° 52] tra gli angoli α ed α' :

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = - \frac{b^2}{a^2},$$

si ha il coefficiente di xy :

$$a^2 \sin \alpha \sin \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha' = a^2 \cos \alpha \cos \alpha' (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' + \frac{b^2}{a^2}) = 0;$$

quindi l'equazione precedente si trasforma in:

$$(a^2 \sin^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha') y^2 + (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) x^2 = a^2 b^2. \quad (2)$$

E ponendo ancora:

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} = m^2, \quad \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha'} = n^2, \quad (3)$$

si avrà:

$$m^2 y^2 + n^2 x^2 = m^2 n^2, \quad (4)$$

come equazione dell'ellisse riferita ad un sistema di diametri coniugati.

Da questa equazione segue:

$$\text{per } y = 0 : x^2 = \overline{OD}^2 = \overline{OD'}^2 = m^2$$

$$\text{per } y = 0 : y^2 = \overline{OE}^2 = \overline{OE'}^2 = n^2;$$

m ed n sono dunque i semidiametri coniugati a cui l'ellisse è riferita.

57. Per le cose precedenti le sei quantità $a, b, m, n, \alpha, \alpha'$ sono legate dalle tre equazioni:

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} = m^2 \quad (1), \quad \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha'} = n^2 \quad (2),$$

$$a^2 \sin \alpha \sin \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha' = 0, \quad (3)$$

l'ultima delle quali è identica con

$$\operatorname{tg} \alpha . \operatorname{tg} \alpha' = - \frac{b^2}{a^2} \quad (3')$$

1) Mercè la moltiplicazione di (1) per (2) si ha :

$$a^2 b^2 = m^2 n^2 [a^2 b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' \cos^2 \alpha + a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha' + \\ + a^2 b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha'] ,$$

e dall'equazione (3) elevata a quadrato si ha :

$$a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \alpha' = - 2 a^2 b^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha' \cos \alpha \cos \alpha' ;$$

la quale espressione sostituita nell'equazione precedente la trasforma in

$$a^2 b^2 = m^2 n^2 (\operatorname{sen} \alpha' \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha')^2 = m^2 n^2 . \operatorname{sen}^2 (\alpha' - \alpha) ,$$

donde

$$ab = mn . \operatorname{sen} (\alpha' - \alpha) , \quad (4)$$

Si conducono ED, ED' (fig. 34), indi EF perpendicolare a DD'; avremo $EF = n . \operatorname{sen} (\alpha' - \alpha)$, ed in conseguenza

$$\text{triangolo } DED' = mn . \operatorname{sen} (\alpha' - \alpha) ;$$

daltronde il prodotto ab esprime evidentemente la superficie del triangolo che ha per base l'asse maggiore $2a$ e per altezza il semiasse minore b . Quindi l'equazione (4) rappresenta il seguente teorema :

Il parallelogrammo, che risulta dal congiungere i punti estremi di due diametri conjugati, è equivalente al rombo di cui sono vertici i punti estremi degli assi.

Si conducano inoltre delle tangenti all'ellisse nei punti estremi dei due diametri conjugati DD', EE'; la superficie del parallelogrammo GHIK da esse formato sarà doppia di quella del parallelogrammo DED'E'; quindi

$$GHIK = 2ED'E'D = 4mn . \operatorname{sen} (\alpha - \alpha) = 4ab ,$$

donde risulta ancora il seguente teorema :

La superficie del parallelogrammo formato dalle

quattro tangenti menate pei punti estremi di due diametri conjugati, è una quantità costante ed eguale alla superficie del rettangolo degli assi.

2) Dietro note formole trigonometriche si ha da (3'):

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{b^4}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha'}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha'}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha'},$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha' = \frac{b^4}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \cos^2 \alpha' = \frac{a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

i quali valori sostituiti in (1) e (2), danno:

$$m^2 = \frac{a^4 \operatorname{sen}^2 \alpha' + b^4 \cos^2 \alpha'}{a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha'} \dots (5), \quad n^2 = \frac{a^4 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^4 \cos^2 \alpha}{a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \dots (6).$$

Or addizionando (1) con (6), ovvero (2) con (5), si ottiene

$$m^2 + n^2 = \frac{a^4 \operatorname{sen}^2 \alpha + a^2 b^2 + b^2 \cos^2 \alpha}{a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} = \frac{a^4 \operatorname{sen}^2 \alpha' + a^2 b^2 + b^4 \cos^2 \alpha'}{a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha'},$$

donde, attuando la divisione, segue:

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2. \quad (7)$$

La somma dei quadrati di due diametri conjugati è dunque costante ed eguale alla somma dei quadrati degli assi.

Osserviamo ancora che essendo date tre delle 6 quantità $a, b, m, n, \alpha, \alpha'$, le altre tre potranno trovarsi mercè le equazioni (1), (2) e (3) o (3'), e che le due prime, a e b , potranno ancora ottenersi per mezzo delle equazioni (4) e (7). Sono di questa specie p. e. i seguenti problemi: 1) Essendo dati due diametri conjugati e l'angolo di conjugazione, calcolare gli assi. 2) Dati gli assi, determinare un sistema di diametri conjugati che racchiudano un dato angolo $\alpha' = \alpha$.

58. Tra gl' innumerevoli sistemi di diametri conjugati dell' ellisse sono notevoli quelli che risultano rispettivamente paralleli alle congiungenti i punti estremi degli assi, e (come risulta dalla simmetria dell' ellisse rispetto ai suoi diametri principali) sono eguali. Riferendo l' ellisse a questo sistema di diametri conjugati, la sua equazione (per essere $m = n$ nell' equazione (4)

del n° 56) sarà ;

$$y^2 + x^2 = m^2,$$

identica all'equazione al centro del cerchio riferita ad assi rettangolari. Ogni equazione di questa forma nel caso di assi obliqui è dunque quella di un'ellisse riferita a diametri conjugali eguali. Diseguando , come per lo innanzi , α ed α' gli angoli che i due diametri eguali formano coll'asse delle x , sarà :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b}{a},$$

e dall'equazione (7) si avrà :

$$m = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

59. Dalla perfetta coincidenza delle forme , che assume l'equazione dell'ellisse , riferita sia agli assi sia a qualsivoglia sistema di diametri conjugati , deriva che tutte le proprietà di questa curva finora esaminate , e che sono indipendenti dalla direzione dei diametri , debbono ancora aver luogo quando essa sia riferita ad un sistema di diametri conjugati. Sono di questa specie l'equazione della tangente , e le formole e costruzioni del n° 48 relative al problema di menare una tangente all'ellisse per un punto dato fuori di essa.

E per quel che riguarda i risultamenti ottenuti nel suddetto paragrafo , se consideriamo che ad ogni retta giacente nel piano di un'ellisse si può condurre un diametro parallelo , e che le formole ivi esposte non si alterano quando in vece degli assi si tolga a sistema di coordinate qualunque coppia di diametri conjugati , purchè per a e b s'intendano le metà di questi diametri ; noi perverremo al seguente teorema :

Se da qualsivoglia punto di una retta (polare) giacente nel piano dell'ellisse , si conducano delle tangenti a questa curva , le congiungenti i punti di contatto di ogni coppia di tangenti s'intersecheranno tutte in un medesimo punto (polo) , il quale giacerà sul conjugato del diametro parallelo alla retta data.

E reciprocamente :

Conducendo per qualsiasi punto (polo) dato nel pia-

no dell'ellisse delle corde o seganti, e per ogni coppia di punti, in cui l'ellisse è intersecata da quelle corde o seganti, menando delle tangenti; ogni coppia di questa andrà ad incontrarsi sopra un punto di una retta (polare) parallela al diametro conjugato di quello che passa pel punto dato.

II. L'iperbole.

60. L'equazione dell'iperbole, riferita al centro ed ai diametri principali, è:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2, \quad (1)$$

nella quale $2a$ rappresenta l'asse primario o reale, che nel tempo stesso è asse delle x , e $2b$ l'asse secondario o immaginario.

Ponendo $a = b$ nella precedente equazione, essa si trasforma in $y^2 - x^2 = -a^2$. L'iperbole in questo caso dicesi equilatera, ed essa è tra le iperboli ciò che il cerchio è tra le ellissi.

Indicando con e l'eccentricità lineare, vale a dire la distanza del fuoco dal centro, e con ε l'eccentricità numerica, si avrà, com'è noto (n° 44):

$$e^2 = a^2 + b^2, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad b^2 = e^2 - a^2 = a^2 (\varepsilon^2 - 1),$$

e pei raggi vettori $F'M = r$, $F'M = r'$ (fig. 23) di qualsivoglia punto M dell'iperbole, la cui ascissa misurata dal centro sia $CP = x$, si avrà:

$$r = \frac{e}{a} x - a, \quad r' = \frac{e}{a} x + a,$$

la cui differenza è costante ed eguale all'asse primario $2a = AA'$. Su questa proprietà è fondato un metodo di facile costruzione dell'iperbole per punti, di cui non è necessario d'intrattenerci.

L'equazione (1) messa sotto la forma:

$$\frac{y^2}{(x-a)(x+a)} = \frac{b^2}{a^2}$$

esprime il teorema, che il quadrato dell'ordinata è al rettangolo delle distanze del suo piede dai vertici della curva nella ragion costante di $b^2 : a^2$.

Sull'asse primario dell'iperbole (1) costruendone una che sia equilatera, ed indicando con y , y' le ordinate corrispondenti nelle due curve ad una medesima ascissa x , avremo:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad y' = \pm \sqrt{x^2 - a^2},$$

e con ciò $y : y' = b : a$. Il teorema espresso in questa proporzione, e l'altro che precede, sono analoghi ai due dimostrati rispetto all'ellisse nel n° 43; l'ultimo purtuttavia non può servire alla costruzione dell'iperbole, essendochè l'iperbole equilatera non è più facile ad essere costruita di un'altra qualunque.

Comparando le equazioni al centro dell'iperbole ed ellisse, si osserva che questa si trasforma in quella scrivendo $-b^2$ in vece di b^2 , ovvero $b\sqrt{-1}$ in vece di b . Quindi le equazioni e formole dedotte dall'equazione dell'ellisse si trasformeranno immediatamente nelle corrispondenti da riferirsi all'iperbole col solo cambiamento del segno di b^2 . In conseguenza di questa somiglianza le due curve posseggono analoghe proprietà, la cui deduzione concorda così bene, che in prosieguo per simili casi noi recheremo soltanto i risultamenti, ed in vece di dedurli rinvieremo ai paragrafi precedenti che vi hanno relazione.

Delle tangenti all'iperbole.

61. Unendo l'equazione dell'iperbole: $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$ con quella di una retta qualunque:

$$y = mx + n, \quad (1)$$

si avrà mercè l'eliminazione di y l'equazione:

$$x^2 (a^2 m^2 - b^2) + 2 a^2 m n x + a^2 (b^2 + n^2) = 0, \quad (\alpha)$$

la quale somministra le ascisse dei punti d'intersezione, e dimostra in pari tempo che l'iperbole sarà intersecata dalla retta in due punti, eccetto il caso di $a^2 m^2 - b^2 = 0$, vale a dire $n = \pm \frac{b}{a}$, nel quale la retta incontra l'iperbole soltanto in un punto, essendochè allora (α) scende al 1° grado. Escludendo primieramente questo caso speciale, la risoluzione di (α) dà per ascisse dei punti d'intersezione:

$$x = \frac{-a[amn + b\sqrt{b^2 + n^2 - a^2m^2}]}{a^2m^2 - b^2}. \quad (\beta)$$

Or dovendo i due punti d'intersezione confondersi in un solo affinchè la secante divenga tangente, egli è chiaro che all'uopo il radicale dovrà sparire nell'espressione precedente, e come equazione di condizione pel contatto si avrà:

$$a^2m^2 - b^2 - n^2 = 0. \quad (2)$$

Seguendo la via tenuta per l'ellisse, noi troveremo:

$$\xi = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 - b^2}, \quad \eta = -\frac{b^2n}{a^2m^2 - b^2}$$

per coordinate del punto di contatto, ed:

$$y - \eta = \frac{b^2\xi}{a^2\eta} (x - \xi), \quad (3)$$

ovvero

$$a^2\eta y - b^2\xi x = -a^2b^2, \quad (4)$$

quale equazione della tangente nel punto ξ, η . Disegnando con τ l'angolo che la tangente al punto ξ, η dell'iperbole forma coll'asse delle x , avremo:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{b^2\xi}{a^2\eta}. \quad (5)$$

Equazione della normale nel punto ξ, η dell'iperbole è:

$$y - \eta = -\frac{a^2\eta}{b^2\xi} (x - \xi). \quad (6)$$

Inoltre si ha (fig. 35):

$$PT = \text{Sottotangente} = -\frac{a^2\eta^2}{b^2\xi} = -\frac{\xi^2 - a^2}{\xi},$$

$$PN = \text{Sottonormale} = \frac{b^2\xi}{a^2},$$

$$MT = \text{Tangente} = \frac{\eta}{b^2\xi} \sqrt{a^4\eta^2 + b^4\xi^2},$$

$$MN = \text{Normale} = \frac{1}{a^2} \sqrt{a^4\eta^2 + b^4\xi^2}.$$

Si vede che nell'iperbole del pari che nell'ellisse la sottotan-

gente è indipendente da η e b ; quindi descrivendo sopra un medesimo asse reale una serie d'iperbole, e menando ad esse delle tangenti in punti corrispondenti ad una medesima ascissa, tutte queste tangenti s'incontreranno in un medesimo punto dell'asse reale.

La sunnormale ottiene per $\xi = a$, vale a dire nel vertice dell'iperbole, il suo minimo valore $\frac{b^2}{a} =$ al semiparametro, e va aumentando col crescere di ξ fino all'infinito. Perciò mentre nell'ellisse il valore della sunnormale è sempre contenuto tra i limiti 0 e $\frac{p}{2}$, sta poi nell'iperbole tra i limiti $\frac{p}{2}$ e ∞ .

62. L'espressione (5) per $tg\tau$ merita ulteriore considerazione. Se nell'ellisse la tangente può avere tutte le possibili inclinazioni all'asse delle x , ciò non è possibile per l'iperbole. Imperocchè eliminando η da (5) mercè l'equazione della curva, si ha:

$$tg\tau = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{\xi^2}}}.$$

Or $\xi = a$ è il minimo (numerico) valore possibile di ξ , pel quale si ha $tg\tau = \pm \infty$, quindi $\tau = 90^\circ$; vale a dire che la tangente al vertice della curva è perpendicolare all'asse primario. Or facendo crescere ξ infinitamente, $tg\tau$ diverrà sempre più piccola stantechè $\frac{a^2}{\xi^2}$ continuamente decresce, e quando sarà $\xi = \infty$, $tg\tau$ perverrà al limite $\pm \frac{b}{a}$, al disotto del quale non potrà discendere.

Si elevi quindi nel vertice A (fig. 35) una perpendicolare, si faccia $AH = -AH' = b$, e pel centro O e pei punti H, H' si conducano le rette VV', WW'; sarà:

$$tg VOX = + \frac{b}{a}, \quad tg WOX = - \frac{b}{a},$$

donde mercè le cose già dette risulta che la tangente all'iperbole non può fare coll'asse delle x un angolo acuto minore di VOX, nè un angolo ottuso maggiore di WOX.

Ponendo inoltre nell'equazione (4) della tangente $y = 0$, si avrà:

$$x = OT = \frac{a^2}{\xi};$$

donde segue, che il punto d'intersezione della tangente coll'asse delle x giacerà sempre tra il centro ed i due vertici, e tanto più si approssimerà al primo, come ξ diverrà più grande. Or immaginiamo il punto di contatto trasportato ad una distanza infinita, vale a dire $x = \infty$, sarà nel tempo stesso: $tg \tau = \pm \frac{b}{a}$, $OT = 0$. Dunque come il punto di contatto si allontana, così la tangente MT si avvicina ad una delle due rette VV' , WW' , rappresentate dall'equazione:

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

e si confonderà con una di esse, quando sarà $\xi = \infty$.

Indichiamo con y ed y' le ordinate corrispondenti ad una medesima ascissa $OP = x$ per l'iperbole e la retta VV' ; sarà:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2), \quad y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2,$$

e sottraendo dalla seconda di queste due equazioni la prima, si avrà:

$$(y' - y)(y' + y) = b^2.$$

Il prodotto $(y' - y)(y' + y) = MQ.M'Q$ è dunque una quantità costante; e da ciò segue che se x , e con essa y ed y' , divengono sempre più grandi, la differenza $y' - y$ andrà sempre decrescendo, e diverrà infinitamente piccola quando x sarà divenuta infinitamente grande. L'iperbole in conseguenza va continuamente avvicinandosi alle rette VV' , WW' , senza giammai coincidere con esse.

Una linea retta o curva, a cui un ramo indefinito di curva sempre più si avvicina senza giammai coincidere con essa, dicesi assintoto della curva. L'iperbole possiede dunque due assintoti rettilinei, che s'intersecano nel centro, e le cui equazioni sono:

$$y = + \frac{b}{a} x, \quad y = - \frac{b}{a} x.$$

Or egli è facile ottenere il significato geometrico del caso speciale menzionato nel principio del n° 61, cioè che una retta $y = mx + n$ taglia l'iperbole in un solo punto, quando si ha $m = \pm \frac{b}{a}$; essendochè la retta è allora parallela ad un'assintoto. Da ciò segue immediatamente essere impossibile condurre in un'iperbole una corda parallela ad un'assintoto.

Ponendo $n = 0$ in (a), si ha rispetto ai punti in cui una retta, $y = mx$, condotta pel centro, incontra l'iperbole:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}, \quad y = \pm \frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}};$$

donde segue che un' intersezione avrà luogo o pur no, secondochè m sarà numericamente minore o maggiore di $\frac{b}{a}$, vale a dire secondochè la retta starà tra un assintoto e l'asse primario, o tra un assintoto e l'asse secondario dell'iperbole:

63. Il problema di condurre una tangente all'iperbole per un punto x', y' giacente fuori di essa, sarà risoluto nello stesso modo che per l'ellisse (n° 49). Tutte le formole ivi svolte diveranno immediatamente applicabili all'iperbole, sol che vi si muti il segno di b^2 , e le conseguenze ed i teoremi da esse dedotti avranno luogo senza alcuna variazione anche per questa curva.

64. Dovendo il punto d'intersezione T di una tangente MT (fig. 36) coll'asse reale cader sempre tra i due vertici, ed in conseguenza tra i due fuochi, ed essendo $OT = \frac{a^2}{c}$ (n° 62), si avrà, ponendo i raggi vettori menati al punto di contatto $FM = r$, $F'M = r'$:

$$FT = e - \frac{a^2}{c} = \frac{a}{c} \left(\frac{e^2}{a} - a \right) = \frac{ar}{c},$$

$$F'E = e + \frac{a^2}{c} = \frac{a}{c} \left(\frac{e^2}{a} + a \right) = \frac{ar'}{c},$$

donde risulta:

$$FT : F'T = r : r'.$$

Ed applicando questa proporzione al triangolo FFM, si ha il seguente teorema: la tangente divide in due parti eguali l'angolo formato dai raggi vettori menati al punto di contatto.

Questo teorema si accorda perfettamente coll'analogia proprietà dell'ellisse, e perciò anche tutte le conseguenze ivi (n° 51) tratte, non che le costruzioni che se ne sono dedotte, potranno immediatamente applicarsi all'iperbole: E quanto a queste ultime che si veggono attuate nella fig. 36, piccolissime modificazioni, e che già cadono sott'occhio, ne vengono dalla circostanza che la tangente all'iperbole giace tra i due raggi vettori e per l'ellisse ne sta fuori.

Dei diametri dell'iperbole.

56. Eccetto la direzione degli assintoti, rispetto ai quali è noto non poter esistere veruna corda parallela, anche nell'iperbole a ciascun sistema di corde parallele corrisponde un diametro rettilineo passante pel centro, quindi se indichiamo con φ , come nel n° 32, l'angolo d'inclinazione delle corde all'asse primario riguardato come asse delle x , avremo per equazione del corrispondente diametro:

$$y = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} \varphi} x ;$$

quindi se ψ disegna l'angolo che il diametro forma coll'asse delle x , si avrà :

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{b^2}{a^2} \quad (1)$$

Donde segue — come nell'ellisse — che ad ogni diametro ne corrisponde un altro conjugato, ciascuno dei quali divide per metà le corde parallele all'altro.

Essendo sempre positivo il prodotto $\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi$, i due angoli φ e ψ saranno contemporaneamente acuti ovvero ottusi; in conseguenza nell'iperbole i due diametri conjugati giaceranno sempre in un medesimo quadrante, e propriamente dall'un lato e l'altro dell'assintoto, poichè se $\operatorname{tg} \varphi < \frac{b}{a}$, dovrà esser $\operatorname{tg} \psi > \frac{b}{a}$: di-

modochè uno dei diametri giacerà tra l'asse primario e l'assintoto, il suo conjugato tra l'assintoto e l'asse secondario.

E dietro il già detto verso la fine del n° 62 il primo soltanto di questi due diametri, ma non il secondo, incontrerà l'iperbole; la quale proprietà è dunque comune ad ogni sistema di diametri conjugati ed a quello degli assi. Ed analogamente a quest'ultimo sistema noi chiameremo primario quello dei due diametri conjugati che incontrerà l'iperbole, e secondario l'altro.

Segue ancora dalle cose dette che l'accrescimento dell'angolo φ porta in conseguenza la diminuzione di ψ , dimodochè due diametri conjugati vanno sempre avvicinandosi, a misura che il primario di essi si allontana dall'asse dello stesso nome, e finiscono col confondersi coll'assintoto.

Nell'iperbole equilatera essendo $a=b$, sarà $tg\varphi \cdot tg\psi = 1$, vale a dire che gli angoli formati da due diametri conjugati coll'asse primario, sono complementari l'uno dell'altro.

66. Congiungendo i punti estremi di un diametro primario DD' (fig. 37) con qualsivoglia punto M dell'iperbole, si avrà una coppia di corde supplementari, per le quali collo stesso metodo seguito nel n° 53 si troverà la relazione:

$$tg\varphi \cdot tg\psi = \frac{b^2}{a^2},$$

φ e ψ dinotando gli angoli che essi formano coll'asse primario. E la coincidenza di questa coll'equazione (1) del n° precedente, relativa ad un sistema di diametri conjugati, mena alle stesse conseguenze che abbiamo ottenuto (n° 53) per l'ellisse. Quindi per costruire il conjugato di un diametro DD' , si condurrà AN parallela a DD' , e condotta la NA , la EE' menata pel centro parallelamente ad AN sarà la direzione del diametro conjugato. Saranno ancora risolti nello stesso modo che per l'ellisse i problemi di costruire un sistema di diametri conjugati che racchiudano un angolo dato, e di costruire gli assi di una data iperbole.

E del pari che per l'ellisse si dimostrerà ancora per l'iperbole il teorema, che una tangente alla curva è parallela al diametro conjugato di quello che passa pel punto di contatto.

L'iperbole riferita ad un sistema di diametri coniugati.

67. Prendiamo un sistema di diametri coniugati dell'iperbole, OX, OY (fig. 38) qual sistema di assi coordinati, e siano α, α' gli angoli che il diametro primario, riguardato come asse delle x , ed il secondario formano coll'asse primario. Ponendo $x \cos \alpha + y \cos \alpha'$ in vece di x , ed $x \sin \alpha + y \sin \alpha'$ in vece di y nell'equazione al centro, questa si otterrà trasformata in:

$$y^*(a^2 \sin^2 \alpha' - b^2 \cos^2 \alpha') + 2xy(a^2 \sin \alpha \sin \alpha' - b^2 \cos \alpha \cos \alpha') - x^*(b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha) = -a^2 b^2,$$

dalla quale deve sparire il termine in xy in virtù dell'equazione di condizione che ha luogo tra gli angoli α ed α' :

$$\text{ossia} \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha' &= \frac{b^2}{a^2}, \\ a^2 \sin \alpha \sin \alpha' - b^2 \cos \alpha \cos \alpha' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

E poichè si ha $\operatorname{tg}^2 \alpha < \frac{b^2}{a^2}$ e $\operatorname{tg}^2 \alpha' > \frac{b^2}{a^2}$, i coefficienti dei termini in x^2 ed y^2 saranno essenzialmente positivi; perciò facendo:

$$m^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha}, \quad n^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha' - b^2 \cos^2 \alpha'}, \quad (2)$$

avremo per equazione dell'iperbole riferita ad un sistema di diametri coniugati:

$$m^2 y^2 - n^2 x^2 = -m^2 n^2, \quad (3)$$

la quale, come si vede, ha la stessa forma dell'equazione al centro.

Segue dell'equazione (3) che per $y=0$, sarà $x^2 = \overline{OD}^2 = \overline{OD'}^2 = m^2$, dimodochè m rappresenta la metà del diametro primario; e per $x=0$, sarà $y = \pm n \sqrt{-1}$, vale a dire che il diametro secondario, come è noto, non incontrerà l'iperbole. Intanto per analogia si è riguardato come lunghezza del diametro secondario il valore di n tratto dall'equazione (2), $OE = OE' = n$.

È noto che l'equazione degli assintoti riferiti ai diametri principali è: $y = \pm \frac{b}{a} x$; la quale elevata a quadrato prende la

forma $a^2y^2 - b^2x^2 = 0$. Trasformando questa equazione con ridurre al precedente sistema di diametri conjugati avremo:

$$y^2 (a^2 \sin^2 \alpha' - b^2 \cos^2 \alpha') - x^2 (b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha) = 0,$$

da cui mercè le equazioni (2) risulta:

$$y = \pm \frac{n}{m} x. \quad (4)$$

Laonde l'equazione degli assintoti conserverà inalterata la sua forma, in qualunque sistema di diametri conjugati si ripongono gli assi coordinati.

Ponendo nell'equazione (4) $x = m = OD$, si avrà $y = n = DG$; dunque gli assintoti si confonderanno colle diagonali del parallelogrammo costruito su due diametri conjugati qualunque; e viceversa: i vertici del parallelogrammo costruito su due diametri conjugati qualunque staranno sugli assintoti.

Quindi data l'iperbole coi suoi assintoti, sarà facile per mezzo di questo teorema di costruire il diametro secondario che sia conjugato ad un dato diametro primario; ovvero di costruire gli assintoti quando in lunghezza e direzione siano dati due diametri conjugati; o con questo medesimo dato costruire gli assi, considerando che questi dovranno dividere per metà l'angolo formato degli assintoti.

Le sei quantità $a, b, m, n, \alpha, \alpha'$ sono unite mercè le tre equazioni (1) e (2), mercè le quali si potranno determinare tre di esse quantità, quando le altre tre son date. Collo stesso metodo seguito nel n° 56 otterremo dalle dette equazioni:

$$ab = mn \sin(\alpha' - \alpha) \quad (5)$$

$$m^2 - n^2 = a^2 - b^2 \quad (6)$$

Dunque nell'iperbole: 1) il parallelogrammo costruito su due diametri conjugati è costante ed eguale al rettangolo degli assi (come nell'ellisse): 2) la differenza dei quadrati di due diametri conjugati è costante ed eguale alla differenza dei quadrati degli assi.

Dall'equazione (6) risulta che non potrà esser giammai $m = n$, finchè a è diversa da b ; quindi nell'iperbole non esiste verun

sistema di diametri conjugati eguali. Ma se poniamo $a=b$, sarà ancora $m=n$; vale a dire che nell'iperbole equilatera i diametri conjugati sono eguali a due a due.

Ciò che si è detto nel n° 39 vale ancora per l'iperbole.

L'iperbole riferita agli assintoti.

68. Dando all'equazione al centro dell'iperbole la forma:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 (1 - \frac{a^2}{x^2}), \quad (1)$$

si conosce subito che questa curva ha due assintoti rettilinei compresi nell'equazione:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2. \quad (2)$$

Imperocchè facendo crescere continuamente x , il valore di y risultante dall'equazione (1) si approssimerà sempre più e per un grado qualunque di esattezza, a quello che si ha dall'equazione (2); o in altri termini, l'iperbole si avvicinerà continuamente alle rette rappresentate dall'equazione (2), senza incontrarle giammai; queste rette son dunque assintoti dell'iperbole.

Or vogliamo cercare l'equazione dell'iperbole riferita agli assintoti, quali assi coordinati. Indicando con 2λ l'angolo degli assintoti, ossia quello formato dai due assintoti ed in cui giace l'asse primario, dovremo porre $\alpha = -\lambda$ ed $\alpha' = +\lambda$ nella formola (4) del n° 5, e quindi per ottenere la trasformazione richiesta dovremo nell'equazione al centro sostituire ad x ed y le espressioni:

$$\begin{aligned} x \cos \lambda + y \sin \lambda &= (x + y) \cos \lambda \\ -x \sin \lambda + y \cos \lambda &= (y - x) \sin \lambda. \end{aligned}$$

Or essendo $\operatorname{tg} \lambda = \frac{b}{a}$, sarà $\cos^2 \lambda = \frac{a^2}{e^2}$, e $\sin^2 \lambda = \frac{b^2}{e^2}$, indicando $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ l'eccentricità lineare. Con ciò l'equazione al centro si trasformerà in:

$$a'(y-x)^2 \frac{b^2}{e^2} - b^2(y+x)^2 \frac{a^2}{e^2} = -a^2 b^2,$$

che ridotta alla forma più semplice diviene :

$$xy = \left(\frac{c}{2}\right)^2; \quad (3)$$

e questa sarà l'equazione dell'iperbole agli asintoti.

Viceversa ogni equazione della forma $xy = k^2$, riferita ad assi rettangolari ovvero obliqui, apparterrà ad un'iperbole (equilatera nel caso di assi rettangolari), la cui eccentricità sarà $e=2k$.

La quantità $k^2 = \frac{e^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}$ dicesi potenza dell'iperbole.

Segue dall'equazione (3), che il rettangolo formato dalle coordinate di qualsivoglia punto dell'iperbole, prese parallelamente agli assintoti, è costante ed eguale al quadrato della semieccentricità, e che in conseguenza questa è media proporzionale tra le due coordinate.

Laonde essendo dati gli assintoti ed un punto dell'iperbole, sarà data ancora l'eccentricità $e = 2\sqrt{xy}$; e poichè l'asse primario divide per metà l'angolo degli assintoti, sarà dato ancora il fuoco e con questo le lunghezze dei due assi, imperocchè si ha (fig. 35) $OH = OH' = \sqrt{a^2 + b^2} = e = OF$.

Or egli è facile risolvere il problema di costruire gli assi, essendo dato in grandezza e direzione un sistema di diametri coniugati, se dopo aver costruito gli asintoti e determinata la direzione degli assi dietro ciò che si è detto nel n° precedente, si consideri che nei punti estremi del diametro primario si hanno due punti dell'iperbole.

69. Conducendo una qualunque secante GH (fig. 39), che tagli sugli assintoti, riguardati come assi coordinati, le parti $OG = \alpha$, $OH = \beta$;

$$\frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} = 1 \quad (1)$$

ne sarà l'equazione.

Eliminando la y da questa equazione e quella dell'iperbole riferita agli assintoti, si avrà l'altra :

$$x^2 - \alpha x + \frac{\alpha e^2}{4\beta} = 0 \quad (2)$$

le cui radici x_1, x_2 disegneranno le ascisse dei punti d'intersezione M, M' della secante coll'iperbole. Or sia L il punto medio della corda MM', e ξ, η ne siano le coordinate; sarà

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\alpha}{2}, \text{ quindi [equ. (1)] } \eta = \frac{\beta}{2}.$$

Da ciò segue che il punto L è ancora medio di GH. Ma essendo $GL = HL$, ed $LM = LM'$, sarà $HM = GM'$; vale a dire che le parti di qualunque secante o corda, comprese tra gli assintoti e l'iperbole, sono tra loro eguali. Ed è chiaro che questo teorema vale ancora per una corda, come RS per esempio, la quale unisce due punti presi su i due rami dell'iperbole.

Da questo teorema risulta un metodo semplicissimo per costruire l'iperbole, quando son dati gli assintoti ed un punto della curva. Sia M il punto dato: condotta per questo punto una qualunque secante che incontri gli assintoti nei punti G ed H, si prenda $GM' = HM$, sarà M' un punto della curva. Ed ogni punto così ottenuto potendosi riguardare come dato, si potranno facilmente costruire i quattro rami della curva.

Dall'equazione (2) risulta:

$$x = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha \left(\alpha - \frac{c^2}{\alpha} \right)}.$$

Or se la secante GH deve confondersi colla tangente TT', i due punti d'intersezione M, M' dovranno coincidere in un solo punto F, ed in conseguenza il radicale dovrà sparire: sarà dunque:

$$\alpha \beta = c^2$$

l'equazione di condizione pel contatto, e le coordinate del punto di contatto saranno:

$$\xi = \frac{\alpha}{2}, \quad \eta = \frac{\beta}{2};$$

avemo così $\alpha = OT = 2\xi$, $\beta = OT' = 2\eta$; e questi valori sostituiti nell'equazione (1) ci daranno per equazione della tangente riferita agli assintoti:

*

$$\frac{y}{2\gamma} + \frac{x}{2\xi} = 1.$$

Dai valori già ottenuti dei segmenti che la tangente determina sugli assintoti:

$$OT = 2\xi = 2OP, \quad OT' = 2\gamma = 2PQ$$

segue:

1) $IT = IT'$; vale a dire che il punto di contatto divide per metà la parte della tangente compresa tra gli assintoti: teorema che rientra come caso speciale in quello dimostrato rispetto alla segante.

2) Un processo facile per costruire la tangente ad un dato punto dell'iperbole. Sia I il punto dato; si conduca IP parallela ad un assintoto, e si faccia $PD = PO$; sarà IT la tangente richiesta.

Se si moltiplichino per $\sin 2\lambda$, indicando 2λ l'angolo degli assintoti, l'equazione dell'iperbole a questi riferita, si avrà:

$$xy \sin 2\lambda = \frac{c^2}{4} \sin 2\lambda.$$

Ma essendo

$$\sin 2\lambda = 2 \sin \lambda \cos \lambda = \frac{2ab}{c^2},$$

sarà:

$$xy \sin 2\lambda = \frac{1}{2} ab.$$

E poichè $xy \sin 2\lambda$ rappresenta la superficie del parallelogrammo $IKOP$, costruito sulle coordinate IP, OP di un punto dell'iperbole, prese parallelamente agli assintoti; la superficie di questo parallelogrammo sarà dunque costante ed eguale alla 8^a parte del rettangolo costruito sugli assi $2a$ e $2b$.

III. La parabola.

70. Questa curva si distingue dall'ellisse ed iperbole per ciò che non ha centro, ed in conseguenza non possiede che un solo diametro principale ed un solo fuoco. Prendendo ad asse delle x il diametro principale o asse della parabola, e per origine il punto in cui la curva taglia l'asse (il vertice), è noto esser l'equazione della parabola:

$$y^2 = px,$$

nella quale si dà il nome di parametro alla costante p .

Ordinariamente la parabola è definita in conseguenza della nota proprietà di avere ogni suo punto egualmente lontano da una retta fissa (la direttrice) e da un punto fisso (il fuoco). È noto esser il parametro eguale al doppio della distanza del fuoco dalla direttrice; ed in conseguenza eguale alla doppia ordinata condotta pel fuoco.

Mercè l'esposta proprietà della parabola egli è chiaro in qual modo si possa costruire la curva per punti, allorchè son dati il fuoco e la direttrice. Del resto dall'equazione della curva risulta che l'ordinata di ogni suo punto è media proporzionale tra l'ascissa ed il parametro; ed in conseguenza tutti i modi dettati dalla Geometria elementare per definire la 3^a proporzionale a due rette date, possono servire alla costruzione della parabola.

Delle tangenti alla parabola.

71. Unendo l'equazione della parabola $y^2 = px$ a quella di una retta $y = ax + b$, avremo per determinare le coordinate dei punti d'intersezione le due equazioni:

$$\begin{aligned} a^2 x^2 - (p - 2ab)x + b^2 &= 0, \\ y &= ax + b. \end{aligned} \quad (\alpha)$$

Ponendo $a = 0$, vale a dire che la retta sia parallela all'asse delle x , l'equazione (α) scenderà al 1° grado; quindi una retta parallela all'asse delle x non può incontrar la parabola che in un solo punto. Ma se a è diversa da zero, l'equazione (α) darà:

$$x = \frac{p - 2ab \pm \sqrt{p(p - 4ab)}}{2a^2},$$

donde risulta che la retta non incontrerà la parabola, se sia $p < 4ab$, e la intersecherà in due punti se sia $p > 4ab$. Se poi i due punti d'intersezione debbano coincidere in un solo, e quindi la secante confondersi colla tangente, allora dovrà esser soddisfatta la condizione:

$$p = 4ab, \quad (\beta)$$

e saranno coordinate del punto di contatto

$$\xi = \frac{p - 2ab}{2a^2}, \quad \eta = \frac{p}{2a};$$

e perciò si avrà $\eta^2 = p\xi$, $a = \frac{p}{2\eta}$, $b = \frac{\eta}{2}$. I quali valori sostituiti poi nell'equazione della retta, ci danno per equazione della tangente al punto ξ , η :

$$y = \frac{p}{2\eta} x + \frac{\eta}{2};$$

la quale assumerà la forma più comoda:

$$y - \eta = \frac{p}{2\eta} (x - \xi), \quad (1)$$

ovvero

$$y\eta = \frac{p}{2} (x + \xi), \quad (2)$$

quando si sottragga η dai due membri e si ponga $\frac{p}{2\eta}$ per fattore del secondo membro, avendo riguardo all'equazione $\eta^2 = p\xi$.

L'angolo τ che la tangente forma coll'asse delle x , sarà determinato mercè l'equazione:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{p}{2\eta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{\xi}}. \quad (3)$$

Nell'ipotesi di $\eta = 0$ sarà $\tau = 90^\circ$, vale a dire che la tangente al vertice è perpendicolare all'asse; a misura che η o ξ diverrà più grande, vale a dire a misura che il punto di contatto si allontanerà dal vertice, τ diverrà più piccolo, ed in conseguenza la tangente si approssimerà sempre più a divenire parallela all'asse.

Da (1) si ottiene per equazione della normale al punto ξ , η :

$$y - \eta = -\frac{2\eta}{p} (x - \xi). \quad (4)$$

Ponendo nell'equazione (1) della tangente e nell'equazione (4) della normale $y = 0$, $x - \xi$ rappresenterà rispettivamente la

sottotangente PT (fig. 40) e la sunnormale PN; si avrà dunque:

$$\text{Sottotangente PT} = -2\xi, \text{ Sunnormale} = \frac{p}{2}.$$

Nella parabola la sotttangente è dunque eguale al doppio dell'ascissa del punto di contatto presa dal vertice, e la sunnormale è costante ed eguale al semiparametro.

Ed è chiaro come queste proprietà possano servire ad una costruzione assai semplice della tangente e normale ad un dato punto della parabola.

Essendo $\text{PT} = 2\xi$, sarà $\text{AT} = \xi$, ed in conseguenza $\text{FT} = \xi + \frac{p}{4} = \text{FM}$, ed il triangolo FMT sarà isoscele; quindi conducendo pel punto di contatto M la RD perpendicolare alla direttrice UU', sarà:

$$\text{ang. FMT} = \text{MTF} = \text{DMT} = \text{RMT};$$

e considerando inoltre che per essere $\text{MF} = \text{MD}$ il triangolo MDF è isoscele, si ottengono i seguenti teoremi:

1) Gli angoli che la tangente forma col raggio vettore menato al punto di contatto, e con una retta condotta per lo stesso punto parallelamente all'asse, sono eguali; ed in conseguenza l'angolo formato da questa retta e dal raggio vettore, sarà diviso per metà dalla normale.

2) La congiungente il fuoco col piede della perpendicolare, abbassata dal punto di contatto sulla direttrice, sarà divisa dalla tangente in parti eguali e ad angoli retti.

Ed è chiaro come anche queste proprietà possano servire a diversi modi di costruzione della tangente e normale ad un dato punto della parabola.

Poichè la FD è divisa in due parti eguali nel punto K, e la BF nel vertice A, sarà AK parallela ad UU', ed in conseguenza perpendicolare all'asse: or considerando che K è il piede della perpendicolare abbassata dal fuoco sulla tangente, si trova il teorema: il luogo geometrico del piede della per-

perpendicolare abbassata dal fuoco sulla tangente, è una retta che passando pel vertice è perpendicolare all'asse.

72. Per condurre una tangente alla parabola da un punto G (fig. 41) dato fuori di essa, si osservi che essendo per le cose anzidette ogni punto della tangente GM egualmente lontano dai punti F e D, la tangente taglierà FD ad angoli retti. Perciò descrivendo dal punto G col raggio GF un cerchio, e questo tagliando la direttrice in due punti D e D', le perpendicolari abbassate dal punto G su DF e D'F saranno le tangenti richieste. Ovvero conducendo pei punti D e D' delle parallele all'asse, le loro intersezioni colla parabola daranno i punti di contatto M ed M'.

Volendo risolvere analiticamente il problema, osserviamo che indicando con $x' y'$ le coordinate del punto dato, quelle del punto di contatto, $\eta \xi$, saranno determinate mercè le due equazioni:

$$y'\eta = \frac{p}{2} (x' + \xi), \quad \eta^2 = p\xi, \quad (m)$$

la prima delle quali esprime che la tangente passa pel punto $x' y'$, la seconda, che il punto di contatto giace sulla parabola. Eliminando ξ dalle due, si ottiene:

$$\eta = y' \pm \sqrt{y'^2 - px'};$$

donde si rileva che pel punto x', y' si potranno condurre due tangenti, una sola ovvero nessuna, secondochè sarà $y'^2 >, =$ ovvero $< px'$; vale a dire, secondochè il punto x', y' giacerà fuori, sopra ovvero dentro della parabola. Per la costruzione dei punti di contatto potranno in modo semplicissimo servire i luoghi geometrici delle equazioni (m). Quello della seconda equazione è la stessa parabola data; il luogo della prima è una retta, la corda dei contatti, che sega gli assi coordinati nei punti E ed H, pei quali ponendo successivamente η e $\xi = 0$, si troverà:

$$\xi = AE = -x', \quad \eta = AH = \frac{px'}{2y'};$$

i quali punti si potranno dunque facilmente costruire. E condu-

cendo allora la EH, questa taglierà la parabola nei richiesti punti di contatto M ed M'.

L'ascissa $AE = -x'$ del punto in cui la corda dei contatti incontra l'asse, essendo indipendente dall'ordinata y' del punto dato, valerà anche per la parabola il teorema: Se da un punto qualunque di una retta perpendicolare all'asse della parabola (polare) si conducano le tangenti alla curva, le corde dei contatti si taglieranno tutte in un medesimo punto (polo) giacente sull'asse: e viceversa.

Un risultamento degno di nota si ottiene ancora prendendo il punto x', y' sulla direttrice, per la qual cosa sarà $x' = -\frac{p}{4}$, e la ordinata del punto di contatto:

$$\eta = y' \pm \sqrt{y'^2 + \frac{1}{4}p^2}.$$

Or indicando con τ, τ' gli angoli d'inclinazione delle due tangenti all'asse delle x , si avrà [equ. (3), n° 71]:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{p}{2(y' + \sqrt{y'^2 + \frac{1}{4}p^2})}, \quad \operatorname{tg} \tau' = \frac{p}{2(y' - \sqrt{y'^2 + \frac{1}{4}p^2})},$$

donde risulta $\operatorname{tg} \tau \cdot \operatorname{tg} \tau' = -1$; vale a dire che le due tangenti stanno tra loro ad angolo retto.

L'equazione della corda dei contatti sarà:

$$\eta = \frac{p}{2y'} \left(\xi - \frac{p}{4} \right), \quad (n)$$

la quale per $\eta = 0$ ci dà $\xi = \frac{p}{4}$; dunque la corda dei contatti passerà pel fuoco.

Infine l'equazione della retta che unisce il fuoco col punto $y', x' = -\frac{p}{4}$ sarà:

$$y - y' = -\frac{2y'}{p} \left(x + \frac{p}{4} \right);$$

donde segue, avendo ancora riguardo all'equazione (n), che

questa retta è perpendicolare alla corda dei contatti:

Dei diametri della parabola.

73. Sia SS' (fig. 42) una retta inclinata all' asse sotto l' angolo φ , e che avrà in conseguenza l' equazione $y = x \operatorname{tg} \varphi + b$. Eliminando la x tra questa e l' equazione della parabola, $y^2 = px$, avremo per determinare le coordinate dei punti d' intersezione l' equazione:

$$y^2 - p \cot \varphi \cdot y + pb \cot \varphi = 0.$$

Nella quale supponiamo φ diverso da zero, poichè in contrario (n° 71) la retta non potendo incontrare la parabola che in un solo punto, non potrebbe rappresentare veruna corda. Allora siano y_1, y_2 le coordinate dei punti d' intersezione S, S' , sarà $y_1 + y_2 = p \cot \varphi$; e se indichiamo con β l' ordinata del punto medio C della corda, avremo:

$$\beta = \frac{1}{2} p \cot \varphi. \quad (1)$$

E poichè questo valore di β dipende semplicemente dall' angolo d' inclinazione φ della corda, ne segue, che nella parabola il luogo geometrico dei punti medii di un sistema di corde parallele, ossia il diametro appartenente al sistema delle corde, è una retta parallela all' asse, come d' altronde è noto per le ricerche generali del capo precedente. Mercè l' equazione (1) si determinerà il diametro appartenente ad un dato sistema di corde, e viceversa; imperocchè essendo data β , vale a dire la distanza del diametro $A'X'$ dall' asse, si avrà da (1):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{2\beta}. \quad (2)$$

Conducendo nel punto A' , in cui il diametro taglia la parabola, una tangente a questa curva, ed essendo β l' ordinata di A' , si avrà per l' angolo τ della sua inclinazione all' asse l' espressione

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{p}{2\beta} \text{ [Equ. (3), n° 71] }; \text{ quindi per l' equ. (2) } \tau = \varphi.$$

È dunque la tangente parallela a quelle corde che saranno divise per metà dal diametro menato pel punto di contatto.

La parabola ha quindi comune questa proprietà coll' ellisse ed iperbole; ma in queste ultime due curve avvi un diametro parallelo alla tangente e conjugato a quello menato pel punto di contatto, il quale diametro manca nella parabola, perchè questa non ha centro. E per analogia una tangente ed il diametro menato pel punto di contatto si dicono formare nella parabola un sistema di diametri conjugati, o meglio di assi conjugati. La tangente al vertice e l'asse della parabola, ai quali si riferise l'equazione $y^2 = px$, formano un sistema di simili assi conjugati, e propriamente il solo che sia rettangolare, poichè risulta soltanto dalla condizione di $\beta = 0$, richiesta dall'equazione (2) nell'ipotesi di $\varphi = 90^\circ$.

La parabola riferita ad un sistema di assi conjugati.

74. Facciamo AX', AY' (fig. 42) un sistema di assi conjugati, a cui ora vogliamo riferire la parabola, poniamo l'angolo $X'A'Y' = \varphi$ e siano α, β le coordinate della nuova origine, riferita ai diametri principali AX, AY . Per trasformare l'equazione $y^2 = px$ col riferirla al nuovo sistema, dobbiamo far uso delle formole (4) del n° 4 e porre $\alpha, \beta, 0, \varphi$ in vece di a, b, α, α' : così avremo $x = \alpha + x' + y' \cos \varphi$, $y = \beta + y' \sin \varphi$. E mercè la sostituzione di questi valori nell'equazione $y^2 = px$, ne risulterà:

$$y'^2 \sin^2 \varphi + y'(2\beta \sin \varphi - p \cos \varphi) + \beta^2 - px = px.$$

Ma per l'equazione (2) del n° precedente si ha:

$$2\beta \sin \varphi - p \cos \varphi = 0;$$

ed inoltre essendo il punto α, β sulla parabola, si ha $\beta^2 = px$; quindi l'ultima equazione si trasforma in:

$$y'^2 = p \operatorname{cosec}^2 \varphi \cdot x, \quad (1)$$

e questa è l'equazione della parabola, che ha il parametro p , ed è riferita ad un sistema di assi conjugati che comprendono l'angolo φ . E ponendo:

$$p \cdot \operatorname{cosec}^2 \varphi = m, \quad (2)$$

essa prenderà la forma, perfettamente simile a quella dell' equazione al vertice :

$$y^2 = mx. \quad (3)$$

Quindi ogni equazione di questa forma, che sia riferita ad un sistema di assi coordinati obbliqui, inclinati sotto l'angolo φ , appartenerà ad una parabola il cui parametro sarà $= m \operatorname{sen}^2 \varphi$.

Dall' equazione (2) del n° 75 segue: $\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{p^2}{4\beta^2 + p^2} = \frac{p}{4\alpha + p}$, poichè $\beta^2 = p\alpha$; quindi $m = p + 4\alpha$. Ma il raggio vettore del punto A' essendo $r = \alpha + \frac{p}{4}$, sarà $m = 4r$ ed il significato geometrico della costante m è messo in chiaro, mostrandosi essa eguale a quattro volte la distanza dell' origine A' dal fuoco.

Dalla coincidenza della forma dell' equazione (3) della parabola riferita ad un sistema di assi conjugati, con quella dell' equazione al vertice, segue che tutte le proprietà di sopra esposte, le quali sono indipendenti dall'angolo degli assi coordinati, potranno applicarsi al nuovo sistema.

Così dall' equazione (3) si rileva che in ogni sistema di assi conjugati le ordinate sono medie proporzionali geometriche tra le ascisse ed il parametro m . Donde risulta il seguente metodo per costruire la parabola $y^2 = mx$, quando sono dati gli assi OX, OY (fig. 43) ed il parametro m . Elevata dal punto O la OY' perpendicolare ad OX, su questa retta come asse si costruisca col parametro m la parabola BOC. Indi per diversi punti P, P',... della OX si conducano delle parallele ad OY' ed OY, di cui le prime tagliano la parabola BOC nei punti $m, m', \dots$ e si prendano $PM = Pm, P'M' = P'm', \dots$; i punti M, M',... apparterranno alla parabola $y^2 = mx$.

Del resto, si potrà cominciare ancora dal costruire il fuoco e la direttrice della parabola. Siano perciò OX, OY (fig. 44) i dati assi conjugati ed OX sia il diametro; sarà OY una tangente alla parabola nel punto O; in conseguenza facendo l'angolo $\text{TOu} = \text{XOY}$, la Ou passerà pel fuoco, e prendendo poi $\text{OF} = \frac{1}{4}m$, in F starà il fuoco, e la FX' menata per F parallelamente ad OX sarà l'asse. In fine, prolungando OX in D e prendendo $\text{OD} = \text{OF}$, la

UU' menata pel punto D perpendicolarmente ad FX, sarà la direttrice.

Con un processo simile si troveranno gli elementi di una parabola, la quale sia data già costruita. Congiungendo i punti medi di due corde parallele si avrà primieramente un diametro OX e la direzione della tangente OY, con ciò potrà costruirsi la direzione della Ou, in cui dovrà giacere il fuoco. Ripetendo la stessa costruzione sopra un'altra coppia di corde parallele, il fuoco verrà completamente determinato, e con esso la direttrice e l'asse.

Le equazioni (1), (2) e (3) relative alla tangente (n° 71) valgono ancora per un sistema di assi conjugati, quando al parametro p si sostituisca la costante m dell'equazione (3); quindi per un sistema ancora di coordinate oblique sarà la sotttangente eguale al doppio dell'ascissa del punto di contatto.

Inoltre rimanendo inalterate anche le formole del n° 72, l'ultimo teorema ivi espresso potrà generalizzarsi nel seguente modo: se da qualsivoglia punto di una retta (Polare) giacente nel piano della parabola, si conducano delle tangenti a questa curva, tutte le corde dei contatti si taglieranno in un medesimo punto (Polo), il quale giacerà sul diametro il cui conjugato sarà parallelo alla retta data.

È noto che questo teorema si può invertire, e dopo ciò avrà luogo in tutte le curve del secondo ordine.

CAPO SESTO.

DELLE EQUAZIONI POLARI DELLE LINEE DEL SECONDO ORDINE, E DELLA DETERMINAZIONE DI QUESTE CURVE DIETRO DATE CONDIZIONI.

1. Equazioni polari delle linee del second'ordine.

73. È noto che il sito di un punto M in un piano può esser determinato mercè la sua distanza da un punto fisso, il polo, e l'angolo che questa distanza racchiude con una retta fissa, menata pel polo, l'asse polare. A questi due elementi di determinazione si dà il nome di coordinate polari; l'una di queste coordinate, la distanza del punto M dal polo, di-

cesi raggio vettore, l'altra, l'angolo summentovato, può dirsi angolo polare. Or se M è un punto di una curva formata secondo una certa legge, dovrà esser possibile di esprimere questa medesima legge mediante un'equazione $\varphi(r, \theta) = 0$, ovvero $r = f(\theta)$, tra le coordinate polari r, θ di quel punto della curva, come ciò si è veduto finora rispetto alle coordinate parallele. L'equazione $r = f\theta$ dicesi equazione polare della curva.

Se è data l'equazione della curva $y = f(x)$, riferita a coordinate parallele, se ne avrà l'equazione polare, introducendo in $y = f(x)$ i valori di x ed y espressi in funzione di r e θ ; per la qual cosa serviranno le formole (1) ovvero (3) del n° 2. E viceversa si potrà egualmente dedurre dall'equazione polare la $y = f(x)$ mercè l'uso delle formole (2) ovvero (4) dello stesso n°.

Nei seguenti paragrafi noi andremo a comporre le equazioni polari delle curve del 2° ordine, e propriamente — ciò che sarà più agevole — traendo profitto delle loro proprietà già note, senza far uso della mentovata trasformazione. Prenderemo per polo uno dei fuochi, e per asse polare quello della curva che passa per esso; conteremo l'angolo polare da quella parte dell'asse che nella parabola ed iperbole è prossima al vertice, e nell'ellisse va dal polo al vertice più vicino.

1. Ellisse. Sia (*fig. 28*) F il polo, FX l'asse polare, M un punto della curva, $FM = r$, ang. $MFx = \theta$; contando dal centro l'ascissa $OP = x$, e ponendo l'eccentricità numerica $\frac{e}{a} = \varepsilon$, è noto che sarà $r = a - \varepsilon x$; e poichè

$$x = OF - PF = a\varepsilon + r\cos\theta, \text{ avremo } r = a(1 - \varepsilon^2) - r\varepsilon\cos\theta;$$

donde risulta:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\theta}, \quad (1)$$

per la richiesta equazione polare dell'ellisse. La quale, mercè l'introduzione del parametro $p = \frac{2b^2}{a} = 2a(1 - \varepsilon^2)$, assume la forma:

$$r = \frac{p}{2(1 + \varepsilon\cos\theta)}. \quad (2)$$

Poichè nell'ellisse, com'è noto, si ha $\varepsilon < 1$, sarà sempre $\varepsilon \cos \theta$ numericamente minore di 1, ed r non potrà giammai divenire negativo od infinito. E cercando i valori che assumerà il raggio vettore r , quando θ va crescendo da 0 a 360° , si troverà che mentre r rimane sempre positivo, l'equazione (1) ovvero (2) rappresenterà l'intera ellisse se θ si faccia progredire da 0 a 360° .

II. Iperbole. Sia (fig. 36) F il polo, FX' l'asse polare, $FM=r$, ang. $MFx'=\theta$, sarà $r=\varepsilon x-a$ ed $x=OP=OF+FP=a\varepsilon-r\cos\theta$; quindi $r=a(\varepsilon^2-1)-r\varepsilon\cos\theta$, e l'equazione polare dell'iperbole sarà:

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon \cos \theta}; \quad (3)$$

la quale mediante l'introduzione del parametro $p=\frac{2b^2}{a}(\varepsilon^2-1)$ prende la forma:

$$r = \frac{p}{2(1 + \varepsilon \cos \theta)}. \quad (4)$$

Essendo nell'iperbole $\varepsilon > 1$, r potrà divenire negativo ed infinito. Seguendo i valori di r , mentre θ va da 0° a 360° , ed indicando con θ' ogni valore di θ compreso tra 90° e 180° , pel quale si ha:

$$\cos \theta' = -\frac{1}{\varepsilon}, \text{ quindi } \operatorname{tg} \theta' = -\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = -\frac{b}{a},$$

e che rende $r=\infty$; si troverà facilmente che il raggio vettore descrive il ramo d'iperbole $MA'M''$, mentre θ procede da θ' a $360^\circ - \theta'$, se i valori negativi di r risultanti per questi valori di θ dall'equazione (4) si portino sul raggio vettore prolungato al di là del polo. Da $\theta=0$ fino a $\theta=\theta'$, e da $\theta=360^\circ - \theta'$ fino a 360° , r sarà positivo e descriverà nel primo intervallo la branca AM e nel secondo l'altra AM'' di quel ramo d'iperbole nel cui foco sta il polo.

III. Parabola. Per questa curva si ha:

$$r = x + \frac{p}{4}, \quad (5)$$

c (fig. 24) $x = AP = AF + FP = \frac{p}{4} - r \cos \theta$, ponendo l'ang. AFM = θ ; quindi

$$r = \frac{p}{2(1 + \cos \theta)} = \frac{p}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \theta}. \quad (m)$$

Non si avrà pena a comprendere che questa equazione rappresenterà l'intera parabola, quando θ si faccia variare da 0° a 360° , rimanendo purtuttavia r sempre positivo.

76. La comparazione delle equazioni (3), (4) e (5) ci fa conoscere che l'equazione polare :

$$r = \frac{p}{2(1 + \epsilon \cos \theta)}$$

comprende le tre curve, ed apparterrà ad un'ellisse, un'iperbole od una parabola, secondochè ϵ sarà minore, maggiore od eguale a 1.

Si dà ben di rado l'occasione di prendere qual polo un punto diverso dal fuoco; ma può darsi facilmente il caso che l'asse polare non coincida con l'asse della curva condotto pel fuoco, come si è supposto nelle equazioni precedenti, e che in vece faccia con questo un angolo α . Allora non si avrà a far altro, com'è facile a comprendersi, che sostituire $\theta + \alpha$ a θ , e così si avrà in generale :

$$r = \frac{p}{2[1 + \epsilon \cos(\alpha + \theta)]}$$

per equazione polare delle linee del 2° ordine.

L'equazione polare dell'iperbole ci offre ancora occasione alla seguente osservazione sulle coordinate polari. Finchè si tratta di determinare il luogo di singoli punti in un piano, si può riguardar sempre il raggio vettore come essenzialmente positivo, purchè l'angolo polare si prenda da 0° a 360° . Ma non è sempre così quando si ha da costruire una curva per mezzo della sua equazione polare. L'iperbole ci ha offerto il caso in cui per costruire con una e medesima equazione i due rami della curva, abbiamo dovuto ammettere i valori negativi del raggio vettore. Per ottenere valori positivi di r anche pel ramo a sinistra dell'iperbole, avremmo dovuto far uso dell'equazione :

$$r = \frac{p}{2(1 - \epsilon \cos \theta)},$$

la quale risulta dalla prima, ponendovi $180^\circ + \theta$ in vece di θ , indicando sempre con θ l'angolo che il raggio vettore condotto al ramo, di cui si parla, forma colla porzione di asse polare che passa pel vertice.

Inoltre nelle equazioni polari finora considerate è stato sufficiente il supporre che l'angolo polare θ variasse tra i limiti 0° e 360° . Ma ciò è inammissibile per molte curve, p. e. le spirali; ed è chiaro che ciò avverrà sempre, che l'equazione non contiene funzioni semplicemente periodiche di θ , come seno, coseno, ecc. ma l'arco stesso θ , il quale deve considerarsi in generale come capace di tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$. In tal caso è pienamente conforme alla natura della cosa il riguardare come lineari le due coordinate polari r e θ , non altrimenti che le coordinate parallele; colla differenza che r disegnerà una lunghezza rettilinea, e θ quella di un arco preso sopra un cerchio descritto col raggio $= 1$ e col polo come centro, contando l'arco da uno dei punti in cui il cerchio incontra l'asse polare, e nell'una o l'altra direzione, secondochè θ si prenderà positivo o negativo.

II. Sulla determinazione delle linee del secondo ordine dietro date condizioni.

77. Possiamo supporre di voler cercare, sia analiticamente sia per mezzo di costruzioni, una linea del 2° ordine che renda soddisfatte talune condizioni; per esempio, che passi per un certo numero di punti dati, o che sia tangente a rette date, e simili. È noto l'equazione generale di queste linee essere:

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + F = 0,$$

la quale divisa per F , assume la forma:

$$ax^2 + a'y^2 + 2bxy + 2cx + 2c'y + 1 = 0, \quad (1)$$

in cui non essendovi che cinque costanti indeterminate, altrettante condizioni, l'una dall'altra indipendente, saranno necessarie e sufficienti alla loro determinazione.

Se la curva richiesta debba essere una parabola, basteranno quattro condizioni per la determinazione delle costanti, imperocchè in tal caso dovrà ancora esser soddisfatta l'equazione $b^2 - aa' = 0$.

Se il problema debba ammettere una o più soluzioni, vale a dire se vi siano una o più curve del 2° ordine che rendano soddisfatte le date condizioni; ciò dipenderà dalla natura di queste, in quanto che potranno condurre ad equazioni di primo grado o di grado superiore rispetto ad a, b, c, d, e .

Uno dei problemi più semplici è quello di far passare una linea del 2° ordine per cinque punti dati. Essendo x_i, y_i le coordinate di uno di questi punti, esse dovranno soddisfare l'equazione (1), e quindi ne risulta l'equazione di condizione:

$$ax_i^2 + a'y_i^2 + 2bx_iy_i + 2cx_i + 2c'y_i + 1 = 0;$$

e ciascuno dei rimanenti quattro punti somministrerà un'equazione della stessa forma. Le cinque equazioni di condizione che così si otterranno, saranno, com'è chiaro, di primo grado rispetto alle incognite a, a' , ecc. ed in conseguenza per ciascuna di queste non si avrà che un solo valore reale; quindi il problema non ammetterà che una sola soluzione. Introducendo gli ottenuti valori di a, a' , ecc. nell'equazione (1), si avrà quella della curva richiesta, che passerà pei cinque punti dati e che risulterà un'ellisse, un'iperbole od una parabola, secondochè sarà $b^2 - aa' < 0, > 0, = 0$. Donde segue immediatamente che due linee del 2° ordine, senza coincidere, non possono aver comuni più di 4 punti.

Se la curva richiesta debba esser una parabola, basteranno 4 punti per la determinazione di essa, imperocchè insieme alle equazioni di condizione somministrate dai 4 punti dovrà esser soddisfatta l'altra $b^2 - aa' = 0$; la cui forma quadratica mena poi alla conseguenza che pei 4 punti potranno in generale passare due parabole, ed anche nessuna quando la risoluzione conducesse a risultamenti immaginari.

Del resto poichè una curva del 2° ordine non può esser intersecata da una retta in più di 2 punti, è evidente che dei punti dati giammai 3 potranno esser in linea retta: E se questa condizione non fosse soddisfatta, la risoluzione menerebbe non pertanto ad un'equazione del 2° grado, che non rappresentereb-

be però alcuna curva, ma in vece due rette ovvero una sola, o in fine resterebbe indeterminata.

La risoluzione analitica, quando si voglia attuarla per l'indicata via, sarà per riuscire abbastanza lunga attesa la corrispondente eliminazione, quando anche gli assi coordinati fossero condotti in modo che 4 delle 10 coordinate dei 5 punti risultassero $= 0$. Più facilmente si giungerà alla meta, traendo profitto nel seguente modo dall'osservazione già fatta nella nota a pag. 17. Siano M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 i punti dati. Porremo primieramente da parte uno di essi, p. e. M_5 ; pei 4 che restano si potranno condurre 6 rette, delle quali ne sceglieremo quattro in modo che tre di esse comunque prese non passino per un medesimo punto. Siano p. e. (1, 2), (3, 4) (1, 4), (2, 3) le linee prescelte, le cui equazioni si potranno rappresentare con:

$$(1, 2) = 0, (3, 4) = 0, (1, 4) = 0, (2, 3) = 0.$$

Componendo per via di moltiplicazione le equazioni di 2° grado in x, y :

$$(1, 2). (3, 4) = 0, (1, 4). (2, 3) = 0,$$

la prima di queste rappresenterà il sistema delle due rette (1, 2) e (3, 4), e sarà in conseguenza soddisfatta dalle coordinate dei 4 punti M_1, M_2, M_3, M_4 ; la seconda ha per lungo geometrico le due rette (1, 4), (2, 3), e sarà soddisfatta dalle stesse coordinate. Or moltiplicando una di queste equazioni per una costante indeterminata λ e poi addizionandola all'altra, avremo l'equazione:

$$(1, 2). (3, 4) + \lambda (1, 4). (2, 3) = 0, \quad (\alpha)$$

la quale evidentemente sarà soddisfatta dalle coordinate degli stessi 4 punti, e poichè essa è di 2° grado, così sarà l'equazione generale di tutte le linee del 2° ordine che potranno esser condotte pei 4 punti M_1, M_2, M_3, M_4 .

Ed affinchè la curva contenesse anche il punto M_5 , sostituiremo in (α) le coordinate di questo punto ad x ed y ; ed avremo così un'equazione di condizione, mercè la quale sarà determinata λ . Se la curva debba essere una parabola, λ sarà determinata dalla stessa (α) mercè la condizione $b^2 - aa' = 0$.

Se la curva, invece di passare pel punto M_1 , debba toccare una retta data, allora mercè l'equazione della retta $y=mx+n$ si eliminerà da (α) una delle variabili, ed esprimendo inoltre che l'eliminata debba avere eguali le due radici, si avrà un'equazione di condizione per determinare λ .

Se tra le quantità date si trovino certi punti o linee rimarchevoli, appartenenti alle curve del 2° ordine, il numero delle condizioni necessarie alla determinazione della curva si troverà diminuito. Se p. e. trattandosi di un'ellisse od iperbole, sia dato il centro, allora non bisogneranno che 3 condizioni, imperocchè togliendo ad origine il centro, l'equazione avrà necessariamente la forma:

$$ax^2 + 2bxy + a'y^2 + 1 = 0,$$

la quale non contiene che tre costanti indeterminate.

La stessa cosa risulterà, se sia dato uno dei fuochi, imperocchè prendendo questo punto come polo, ed una retta, comunque condottavi, per asse polare, avremo l'equazione polare delle linee del 2° ordine:

$$r = \frac{p}{2[1 + \varepsilon \cos(\alpha + \theta)]},$$

la quale contiene soltanto le 3 costanti indeterminate p, ε, α . Le 3 condizioni necessarie alla loro determinazione si ridurranno a due nel caso di una parabola, stantechè per questa curva si ha $\varepsilon = 1$.

Poniamo, per esempio, che insieme al fuoco siano dati 3 punti pei quali la curva debba passare: ridotta l'equazione precedente alla forma:

$$r + r\varepsilon \cos(\alpha + \theta) = \frac{p}{2},$$

questa, mercè la risoluzione di $\cos(\alpha + \theta)$ e l'introduzione di due nuove costanti:

$$h = \varepsilon \cos \alpha, \quad k = \varepsilon \sin \alpha,$$

diverrà

$$r + hr \cos \theta - kr \sin \theta = \frac{p}{2}.$$

Or siano x, y le coordinate rettangolari di uno dei punti dati, prendendo il polo per origine e l'asse polare per quello delle x , sarà:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta;$$

quindi l'ultima equazione si trasformerà in:

$$r + hx - ky = \frac{p}{2},$$

nella quale si ha $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ciascuno dei tre punti somministrerà una simile equazione, e quindi si avranno i valori del parametro p e delle due costanti h e k . In fine si avrà:

$$e = \sqrt{h^2 + k^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{h}.$$

Se è data la posizione di un sistema di diametri conjugati, si richiederanno due condizioni per la determinazione di un' ellisse od iperbole, ed una sola per quella di una parabola, come immediatamente risulta dalle equazioni di queste curve riferite a diametri conjugati.

Se per la determinazione di un' iperbole è dato un assintoto, questo dato sarà equivalente a due condizioni, vale a dire ad una tangente con un dato punto di contatto, giacente a distanza infinita. Se poi siano dati i due assintoti, non si richiederà che una sola condizione, stantechè l'equazione agli assintoti contiene una sola costante.

CAPO SETTIMO.

DI ALCUNE LINEE ALGEBRICHE DI ORDINE SUPERIORE,
ED ALCUNE CURVE TRASCENDENTI.

I. Linee algebriche di ordine superiore.

78. Una ricerca completa delle linee algebriche di ordine superiore al secondo, mercè l'analisi delle equazioni generali del 3° , 4° , . . . grado tra due variabili, non sarebbe facile ad ese-

guirsi attesa la sua vastità e l'insufficienza dei mezzi analitici. Il numero delle forme geometriche contenute in un'equazione di grado superiore aumenta in proporzione incomparabilmente più grande del grado stesso. Newton ricercò quelle del 3° grado e ne distinse 72 specie che ordinò in 14 generi; indi Stirling e Cramer vi aggiunsero 6 altre specie: Eulero le divise in 16 famiglie. Questi ha puranco considerato le curve del 4° ordine e le ha distinte in 146 famiglie, le quali comprendono un numero assai grande di specie. Attesa la poca utilità pratica di tutte queste curve si è pensato limitarsi ad alcune di esse, che si offrono all'occasione di speciali problemi, e viemeglio studiarle. Noi ci facciamo a considerarne alcune delle più importanti.

Tra le curve più semplici di ordine superiore si annoverano quelle in cui l'ordinata è una funzione algebrica, intera e razionale dell'ascissa, e la cui equazione ha in conseguenza la forma:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_mx^m.$$

Queste curve vanno sotto la denominazione generale di curve paraboliche del grado m^{esimo} , quando la funzione a destra è del grado m^{esimo}). E poichè ad ogni valore di x risponde un solo valore di y , il quale cresce indefinitamente con x , sia questo positivo o negativo, ne segue che queste curve si compongono di un solo tratto che all'infinito si estende d'ambo i lati. Noi ci siamo già serviti di queste curve nella teorica delle equazioni algebriche, ove sono di speciale importanza.

Una curva parabolica di grado m^{esimo} contiene in generale $m+1$ costanti, ed in conseguenza richiede per la sua determinazione $m+1$ condizioni indipendenti. Il problema più importante, che vi si riferisca, è quello di determinare la curva che passi per $m+1$ punti dati.

*) L'equazione di 2° grado: $y = A_0 + A_1x + A_2x^2$, ha per luogo geometrico la parabola comune, la quale ha l'asse parallelo a quello delle y , l'ascissa del suo vertice è $-\frac{A_1}{2A_2}$, l'ordinata n è $\frac{4A_0A_2 - A_1^2}{4A_2}$, ed il parametro è $= \frac{1}{A_2}$, come si troverà facilmente mercè le teorie esposte nel capo IV, n° 37.

Si dà in ispecie il nome di parabole di ordine superiore alle curve, le cui equazioni hanno la forma $y^n = px^m$; la così detta parabola comune, conica o appolonica, $y^2 = px$, n'è un caso speciale. La curva, che ha per equazione $y^2 = px^3$, dicesi in particolare parabola di Neil o parabola cubica, e sta in istretta connessione colla parabola comune, sulla qual cosa torneremo più tardi. Quanto poi alla forma delle parabole di ordine superiore, essa dipende da ciò che gli esponenti m ed n , che sono sempre numeri interi e positivi, potranno esser entrambi pari o dispari, ovvero l'uno pari e l'altro dispari.

79. Problema. Trovare una curva tale, che il prodotto delle distanze di ogni suo punto da due punti fissi, sia eguale ad una data costante a^2 .

Prendiamo la congiungente dei punti fissi F, F' (fig. 45) per asse delle ascisse, ed il punto medio O di $FF' = 2c$ come origine; sarà $\overline{FM} = y^2 + (e - x)^2$, $\overline{F'M} = y^2 + (e + x)^2$; e dovendo per la condizione del problema esser $FM \cdot F'M = a^2$, si avrà:

$$[y^2 + (e - x)^2][y^2 + (e + x)^2] = a^4,$$

donde mercè facili riduzioni si otterrà:

$$(y^2 + x^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) = a^4 - e^4 \quad (1)$$

per equazione della curva richiesta. La quale, come vedesi, è di 4° grado, e porta il nome di curva di Cassini.

Essendochè l'equazione (1) rimane inalterata, quando ad x , ed y si sostituiscono $-x$, $-y$, è chiaro che l'origine sarà centro della curva, ed ogni corda per esso condotta vi sarà divisa in due parti eguali. Aggiungendo ai due membri dell'equazione (1) una volta $4e^2x^2$ ed un'altra volta $-4e^2y^2$, si avranno le seguenti formole:

$$\begin{aligned} y^2 &= -e^2 - x^2 + \sqrt{a^4 + 4e^2x^2}, \\ x^2 &= e^2 - y^2 \pm \sqrt{a^4 + 4e^2y^2}, \end{aligned}$$

dalle quali immediatamente si rileva che la curva ha per assi coordinati i diametri principali, e che in conseguenza essa

n'è divisa in due parti simmetriche, ed è chiusa in uno spazio limitato; quindi non ha rami infiniti.

Chiamando x' , y' le coordinate dei punti d'intersezione della curva cogli assi, si avrà:

$$x' = \pm \sqrt{e^2 \pm a^2}, \quad y' = \pm \sqrt{a^2 - e^2}.$$

Estendendo la discussione, sono da distinguersi i seguenti casi:

1) $a > e$; in questo caso è da ritenersi il solo segno $+$ sotto il radicale esprimente il valore di x' , quindi la curva intersecherà ciascuno degli assi in due punti soltanto. Ad ogni valore di x , che numericamente sia minore di $x' = \sqrt{e^2 + a^2}$, corrisponderanno due valori di y , eguali ed opposti; per ogni valore più grande di x , y diverrà immaginaria: imperocchè essendo $x^2 < e^2 + a^2$, sarà $a^2 > x^2 - e^2$, $a^4 > (x^2 - e^2)^2$, ovvero $a^4 > x^4 - 2e^2x^2 + e^4$, ovvero $a^4 + 4e^2x^2 > (x^2 + e^2)^2$, vale a dire $\sqrt{a^4 + 4e^2x^2} > x^2 + e^2$, quindi nell'equazione (2) y^2 sarà positivo, e viceversa. La curva racchiude in conseguenza uno spazio bislungo, ed avrà una figura ovale o ellissiforme (fig. 45) finchè sarà $a > e\sqrt{2}$, ed una figura depressa nei punti B, B' (fig. 46) quando a sia compresa tra $e\sqrt{2}$ ed e .

2) $a = e$. In questo caso l'equazione della curva diviene:

$$(y^2 + x^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) = 0, \quad (4)$$

ovvero

$$y^2 = -e^2 - x^2 + e\sqrt{e^2 + 4x^2},$$

nella quale ponendo $y = 0$, si ottiene:

$$x' = 0 \text{ ed } x' = \pm e\sqrt{2}.$$

Quindi la curva taglia l'asse delle ascisse nell'origine e in due altri punti che ne distano da un lato e dall'altro della stessa quantità $e\sqrt{2}$. Ogni valore di x , numericamente $> e\sqrt{2}$ renderà y immaginaria, mentre ad ogni valore più piccolo di x corrisponderanno due valori reali, eguali ed opposti di y . Donde segue che la curva ha una figura nodiforme (fig. 47), donde il nome di Lemniscata, ossia linea a nodo, che ha ricevuto, Il punto O è un così detto punto duplo, perchè due volte in-

contrato dalla curva. Alla distanza $x = \pm \frac{1}{2} e \sqrt{3}$ corrisponde il valore massimo dell'ordinata, ed i punti corrispondenti della curva si trovano sulla circonferenza di un cerchio, descritto dal punto O come centro col raggio $OF = e$. Nella figura è $OF = OF' = e$, il semiasse $OA = OA' = e/\sqrt{2}$, e per ogni punto M della curva si ha:

$$FM.FM = \overline{OF}^2.$$

3) $a < e$. In questo caso sarà immaginaria $y' = \pm \sqrt{a^2 - e^2}$, quindi l'asse delle y non sarà incontrato dalla curva. La quale poi incontrerà l'asse delle x in 4 punti, determinati dalle ascisse $x_1 = \pm \sqrt{e^2 - a^2}$, $x_2 = \pm \sqrt{e^2 + a^2}$; per ogni valore di x , numericamente minore di x_1 e maggiore di x_2 , y risulterà immaginaria, ed avrà poi valori reali eguali ed opposti per le ascisse i cui valori numerici siano compresi tra x_1 ed x_2 : in questo caso dunque la curva costerà di due parti separate, che racchiudono i punti fissi F ed F' (fig. 48).

Sotto queste diverse forme la lemniscata è una curva assai rimarchevole. La sua equazione si semplifica riferendola a coordinate polari. Ponendo nell'equazione (4) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, si avrà per equazione polare della lemniscata:

$$r = \pm e \sqrt{2 \cos 2\theta},$$

donde può immediatamente dedursi che le due tangenti in O (ove è $r = 0$) formano coll'asse delle x un angolo $= \pm 45^\circ$.

La lemniscata si mostra ancora come luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari abbassate dal centro di un'iperbole equilatera sulle tangenti. Ed in vero essendo in generale:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$$

l'equazione di un'iperbole, $y = mx + n \dots (\alpha)$ quella di una tangente ad essa: sarà (n° 61) $a^2 m^2 - b^2 - n^2 = 0 \dots (\beta)$

l'equazione di condizione pel contatto, ed $y = -\frac{1}{m} x \dots (\gamma)$

quella della perpendicolare abbassata dal centro sulla tangente. Eliminando m ed n dalle equazioni (α) , (β) , (γ) si avrà:

$$(y^2 + x^2)^2 + b^2 y^2 - a^2 x^2 = 0$$

per equazione della curva dei piedi delle perpendicolari, la quale equazione nell'ipotesi di $b=a$, vale a dire di un'iperbole equilatera, si trasforma in quella della lemniscata:

$$(y^2 + x^2)^2 + a^2 (y^2 - x^2) = 0,$$

che ha il semiasse $= a$ = al semiasse primario dell'iperbole.

80. Problema. Trovare la curva dei piedi delle perpendicolari abbassate dal vertice della parabola $y^2 = px$ sulle tangenti.

Disegnando $y = mx + n$ l'equazione della tangente, sarà $p = 4mn$ [n° 71 equ. (2)] la condizione di contatto, ed $y = -\frac{1}{m}x$ sarà l'equazione della perpendicolare abbassata dal vertice sulla tangente. Eliminando m ed n da queste tre equazioni, si avrà quella della curva richiesta, che porta il nome di cissoide,

$$y^2 = -\frac{4x^2}{p + 4x}.$$

Da questa equazione si rileva che y sarà reale pei soli valori negativi di x che sono compresi tra 0 e $-\frac{p}{4}$. La curva in conseguenza giacerà per intero tra la direttrice UU' (fig. 49) della parabola e la tangente OY menata pel vertice. Scambiando i due semiasse delle x , e scrivendo in conseguenza $-x$ in vece di $+x$, e ponendo per brevità $p = 4q$, l'equazione precedente sarà trasformata in:

$$y^2 = \frac{x^2}{q - x}.$$

Ad ogni valore di x , compreso tra 0 e q , corrisponderanno due valori eguali ed opposti di y ; quindi la curva sarà simmetrica rispetto all'asse delle x . Ponendo $x = 0$, sarà anche $y = 0$, in conseguenza la curva passa per l'origine; e crescendo x crescerà ancora y , che diverrà infinita quando sarà $x = q$. Il denominatore $q - x$ rappresenta la distanza di un punto della cissoide dalla direttrice; e poichè $q - x = \frac{x^2}{y^2}$, è chiaro che questa distanza andrà diminuendo ed approssimandosi indefinitamen-

te a zero, a misura che si aumenterà y : la direttrice è dunque un assintoto della curva.

Descrivendo un cerchio sulla $OD=q$ come diametro, $y^2=qx-x^2$ ne sarà l'equazione; e se per l'origine O si conduca una qualunque retta, disegnata dall'equazione $y=ax$, essa incontrerà il cerchio e la cissoide nei punti N ed M , le cui ascisse saranno:

$$OR = \frac{q}{1+a^2}, \quad OP = \frac{a^2 q}{1+a^2};$$

quindi anche $DP = OD - OP = \frac{q}{1+a^2} = OR$, ed in conseguenza $BM = ON$; donde risulta un metodo semplicissimo di costruire la cissoide per punti.

II. Curve trascendenti.

81. In generale ogni curva, la cui equazione non può assumere forma di funzione algebrica razionale delle coordinate parallele x, y dicesi trascendente. Quindi apparterranno a questa classe anche le curve, nelle cui equazioni x ed y , ovvero entrambe le coordinate sono elevate a potenze con esponenti irrazionali, p. e. $y = x^{\sqrt{2}}$. Purtuttavia noi qui ci occuperemo soltanto di quelle, per le quali una delle coordinate è data mercè una funzione trascendente dell'altra.

Linea logaritmica (logistica).

Disegnando e la base dei logaritmi naturali, l'equazione di questa curva sotto la forma più semplice sarà:

$$y = ae^{\frac{x}{a}}, \quad \text{ovvero} \quad x = al \frac{y}{a}, \quad (1)$$

ovvero prendendo a come unità di lunghezza,

$$y = e^x, \quad \text{o} \quad x = ly, \quad (3)$$

dimodochè le ascisse rappresenteranno i logaritmi naturali delle ordinate. Dall'equ. (1) si ha $y=a$ quando sia $x=0$; la curva dunque taglia l'asse delle coordinate alla distanza $OA=a$ dall'origine (*fig. 50*). Con x crescente lo sarà anche y , che perverrà all'infinito insieme con x . Per valori negativi di x si avrà

y positiva, ma sarà decrescente come x andrà aumentando, e diverrà infinitesima quando sarà $x = -\infty$; l'asse delle x sarà dunque un assintoto della curva, la quale giacerà intieramente al disopra dell'asse delle x . Al disotto di questo asse non vi sono che punti separati, isolati, in numero infinito che rendono soddisfatte l'equazioni precedenti, ma che non formando una serie continua non possono appartenere alla curva. Di tali punti isolati si hanno in ispecie per quei valori di x che sono espressi da frazione con denominatore pari. Imperocchè ponendo $x = \frac{p}{2q} = ly$, l'equazione (2) sarà riducibile alla forma:

$$\frac{p}{q} = ly^2, \text{ ovvero } y^2 = e^{\frac{p}{q}}, \text{ vale a dire } y = \pm \sqrt{e^{\frac{p}{q}}}.$$

Il positivo di questi due valori apparterrà all'ordinata della curva, corrispondente all'ascissa $x = \frac{p}{2q}$, il negativo ad un punto isolato.

Una forma più generale dell'equazione della curva logaritmica si ha in: $y = mb^{\frac{x}{a}}$, in cui b rappresenta un numero positivo assoluto, m ed a sono quantità lineari di qualsivoglia segno. Questa equazione si può facilmente ridurre alla forma (1). Ponendo $\frac{1}{b} = e^{\frac{1}{a}}$, si avrà $a = \frac{n}{lb}$, quindi

$$y = me^{\frac{x}{a}}.$$

Trasportando l'origine sull'asse delle ascisse di una quantità indeterminata ξ , e ponendo in conseguenza $x + \xi$ in vece di x , l'ultima equazione si trasformerà in:

$$y = me^{\frac{x}{a} + \frac{\xi}{a}} = me^{\frac{\xi}{a}} \cdot e^{\frac{x}{a}};$$

nella quale determinando ξ in modo che sia $me^{\frac{\xi}{a}} = a$, vale a dire che sia $\xi = al \frac{a}{m}$, si avrà $y = ae^{\frac{x}{a}}$.

Immaginando che la curva logaritmica BAC (fig. 51), la cui

equazione è $y = ae^{\frac{x}{a}}$, giri intorno all'asse delle y fino a prendere la posizione $B'AC'$, in cui abbia per equazione $y = ae^{-\frac{x}{a}}$. Ogni retta menata parallelamente all'asse delle y alla distanza $Op = x$, intersecherà queste due curve nei punti M ed M' ; or se N è il punto medio di MM' , si avrà $PN = \frac{1}{2}(PM + PM')$, ed in conseguenza :

$$y = \frac{1}{2}a(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

sarà l'equazione del luogo geometrico DAE di questi punti medii, il quale luogo è ancora una curva trascendente. La quale ha ricevuto il nome di catenaria, imperocchè, come nella Meccanica si dimostra, una catena, o meglio un filo perfettamente flessibile ed inestensibile gravato in tutti i punti di eguali pesi, prende la forma di questa curva.

82. Quando una curva va rotando su di un'altra fissa senza sdrucchiolare su di essa, un punto giacente nel piano della curva mobile e con essa invariabilmente congiunto, descriverà una nuova curva (denominata roulette dai geometri francesi, rollinie dagli alemanni) delle cui varie specie noi ci faremo a considerare le seguenti.

1. La Cicloide comune.

Facendo rotolare un cerchio sopra una retta fissa, un qualsivoglia punto preso sulla circonferenza del cerchio descriverà una curva, denominata cicloide comune o semplicemente cicloide. Per ottenere l'equazione di questa curva, sia XX' (fig. 52) la retta fissa, la base, MBN il cerchio rotante (cerchio generatore) in una certa sua posizione; M il punto descrivente, e quindi un punto della cicloide, ed O un punto della XX' , col quale il punto M coincideva in una delle precedenti posizioni del cerchio generatore. Prendendo per asse delle ascisse la XX' , e la perpendicolare OY , elevatavi dal punto O , qual asse delle ordinate, sarà $OP = x$, $MP = y$. Ponendo l'angolo BCM , denominato angolo di giro, $= \varphi$, sarà $\text{arc.} BM = a\varphi$, a disegnando il raggio del cerchio generatore e φ l'arco descritto col raggio $= 1$. Segue inoltre dalla natura stessa della rota-

zione che $OB = \text{arc. } BM = a\varphi$; e poichè si ha :

$$\begin{aligned} OP &= x = OB - BP = OB - MR, \text{ ed } MR = a \sin \varphi, \\ MP &= y = CB - CR, \text{ e } CR = a \cos \varphi, \end{aligned}$$

sarà :

$$x = a (\varphi - \sin \varphi), \quad y = a (1 - \cos \varphi). \quad (1)$$

Eliminando φ si avrà l'equazione della cicloide; or dalla 2^a delle due ultime equazioni risulta: $\cos \varphi = \frac{a-y}{a}$; quindi

$$\varphi = \arccos \frac{a-y}{a}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{a} \sqrt{2ay - y^2};$$

in conseguenza :

$$x = a. \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}. \quad (2)$$

Purtuttavia nel maggior numero dei casi in vece dell'equazione (2) si adopera con vantaggio il sistema delle equazioni (1), le quali esprimono le coordinate x ed y di un punto della cicloide mercè una terza variabile φ , la quale può ammettere tutti i valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$.

Per ogni valore di φ della forma $\pm 2n\pi$, in cui n è numero intero e positivo, sarà $y = 0$ mentre i corrispondenti valori di x sono dati dall'espressione $\pm 2n\pi a$; quindi la cicloide tocca l'asse delle ascisse in una infinità di punti, $\dots 0, 0', \dots$ che distano tra loro di $2a\pi$, e la curva costa di un'infinità di archi congruenti, come $00'$, di cui ordinariamente non si considera che un solo. Le ordinate acquistano il loro valore massimo $2a$, quando $\cos \varphi = -1$, ossia $\varphi = \pi$, o in generale $\varphi = \pm (2n+1)\pi$; al quale valore di φ appartiene l'ascissa $x = OD = a\pi = \frac{1}{2} 00'$. Il punto corrispondente A, il più alto della cicloide, dicesi vertice. Le due metà OD e DO' della cicloide, giacenti ai due lati del vertice, sono congruenti, essendo noto che $\cos(\pi - \psi) = \cos(\pi + \psi)$. La perpendicolare AD abbassata dal vertice sulla retta XX', dicesi asse della cicloide.

Nella applicazione è sovente più comodo prendere per origine il vertice A; e contando le nuove ascisse sull'asse AD, sarà $AQ = x'$, $MQ = y'$; ed $x = OD - MQ = a\pi - y'$, $y = AD -$

$AQ = 2a - x'$; così le equazioni (1) si trasformeranno in :

$$x' = a + a \cos \varphi, \quad y' = a (\pi - \varphi) + a \sin \varphi,$$

ovvero, ponendo $\pi - \varphi = \psi$,

$$x' = a (1 - \cos \psi), \quad y' = a (\psi + \sin \psi);$$

dalle quali eliminando ψ si avrà :

$$y' = a \arccos \frac{a - x'}{a} + \sqrt{2ax' - x'^2}.$$

2. La cicloide allungata e l'accorciata.

83. Se il punto descrivente M in vece di stare sulla circonferenza del cerchio generatore, si trovi dentro o fuori di essa, si avrà nel primo caso la così detta cicloide allungata, (*fig. 53*), e nel secondo la cicloide raccorciata (*fig. 54*). Si prenda di nuovo la base come asse delle ascisse, e per origine il punto in cui vien toccata dal cerchio generatore in quella sua posizione per la quale il punto descrivente starà verticalmente al di sotto del centro; s'indichi inoltre con a il raggio del cerchio generatore, con b la distanza del punto descrivente M dal centro di esso, con φ l'angolo di giro MCB (*fig. 53 e 54*), e si faccia $OP = x$, $MP = y$; si avrà collo stesso metodo seguito per la cicloide :

$$x = a\varphi - b \sin \varphi, \quad y = a - b \cos \varphi;$$

ed eliminandone φ ,

$$x = a \arccos \frac{a - y}{b} - \sqrt{b^2 - (a - y)^2},$$

che sarà l'equazione della cicloide allungata o raccorciata, secondochè sarà $b <$ ovvero $> a$. Quando è $a = b$, queste equazioni si trasformano in quelle della cicloide comune. Prendendo il vertice A per origine, e contando le ascisse x' sull'asse AD , l'ultima equazione assumerà la forma più semplice :

$$y' = a \arccos \frac{b - x'}{b} + \sqrt{2bx' - x'^2}.$$

3. L'epicicloide e l'ipocicloide.

84. Se un cerchio (cerchio generatore) va rotando sul lato convesso della circonferenza di un altro cerchio fisso (cerchio di base), un punto dato sulla circonferenza del cerchio generatore descriverà l'epicicloide.

Supponiamo primieramente che il contatto dei due cerchi sia esterno, e sia ABA' (fig. 55) il cerchio di base; BMN il cerchio generatore in qualsivoglia posizione, M il punto descrivente, il quale in una precedente posizione dell'ultimo cerchio coincideva col punto A del cerchio di base. Prendiamo il centro O del cerchio fisso come origine, il suo diametro prolungato per A qual asse delle ascisse, e conduciamo le perpendicolari MP, CQ ed MR; le coordinate del punto M dell'epicicloide saranno:

$$x = OP = OQ + MR, \quad y = MP = CQ - CR;$$

or indicando con R, r i raggi del cerchio fisso e del mobile, con φ e φ' gli angoli AOB e BCM, si avrà arcAB = arcBM, vale a dire $R\varphi = r\varphi'$, quindi $\varphi' = \frac{R}{r}\varphi$; sarà inoltre:

$$\begin{aligned} OQ &= (R + r) \cos \varphi, & MR &= r \sin MCR \\ CQ &= (R + r) \sin \varphi, & CR &= r \cos MCR, \end{aligned}$$

e poichè ang. MCR = $\varphi' - (90^\circ - \varphi) = -[90^\circ - (\varphi + \varphi')] = -[90^\circ - \frac{R+r}{r}\varphi]$; così si avrà:

$$\sin MCR = -\cos \frac{R+r}{r}\varphi, \quad \cos MCR \sin \frac{R+r}{r}\varphi.$$

Sostituendo questi valori nelle precedenti espressioni di x ed y, si otterrà per l'epicicloide il sistema delle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x &= (R + r) \cos \varphi - r \cos \frac{R+r}{r}\varphi \\ y &= (R + r) \sin \varphi - r \sin \frac{R+r}{r}\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Se il circolo generatore ha cominciato il suo moto dal luogo in cui M ed A coincidevano insieme, ne avverrà che quando

la lunghezza dell'arco AEA' percorso sul circolo fisso avrà paraggiato la periferia del cerchio mobile, il punto M verrà di nuovo a' contatto col cerchio di base in A', e con ciò avrà descritto l'arco ADA' di epicycloide. Continuando il moto del circolo generatore, il punto M descriverà un secondo arco del tutto congruente al primo, e così di seguito. Se il rapporto $R : r$ dei due raggi è irrazionale, è chiaro che nessuno degli archi seguenti potrà venire a soprapporsi con alcuno dei precedenti; in questo caso l'epicycloide si comporrà di un numero infinito di archi congruenti. Ma se il rapporto $R : r$ è razionale, il punto M dopo una o più circonvoluzioni verrà di nuovo a coincidere con A, e di qui tornerà continuamente a percorrere gli archi già una volta descritti. In questo caso adunque l'epicycloide si comporrà di un numero finito di archi.

Nell'ultimo caso, ossia quando il rapporto $R : r$ è razionale, l'eliminazione di φ dalle equazioni (1) mena ad un'equazione algebrica tra x ed y , dimodochè in questo caso l'epicycloide cessa di esser una curva trascendente. Imperocchè avendosi $R : r = m : n$, m ed n rappresentando numeri interi, le equazioni (1) divengono :

$$x = (R + r)\cos\varphi - r\cos(m + n)\frac{\varphi}{n},$$

$$y = (R + r)\sin\varphi - r\sin(m + n)\frac{\varphi}{n},$$

ovvero, ponendo $\varphi = n\psi$, $m + n = k$:

$$\left. \begin{aligned} x &= (R + r)\cos n\psi - r\cos k\psi, \\ y &= (R + r)\sin n\psi - r\sin k\psi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ma quando n e k sono numeri interi, è noto che $\sin n\psi$, $\cos n\psi$, $\sin k\psi$ possono esser razionalmente espressi mercè le potenze di $\sin\psi$ e $\cos\psi$; ne viene che sostituendo queste espressioni nell'equazioni (2), e facendone sparire $\sin\psi$ e $\cos\psi$ mercè la relazione $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$, si perverrà necessariamente ad un'equazione algebrica tra x ed y .

Il caso più semplice di questa specie è quello in cui si suppone $R = r$; le equazioni dell'epicycloide divengono allora:

$$x = 2r\cos\varphi - r\cos 2\varphi, \quad y = 2r\sin\varphi - r\sin 2\varphi,$$

Le quali mercè le note relazioni:

$$\operatorname{sen} 2\varphi = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi, \quad \cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1,$$

si trasformano nelle seguenti:

$$x = r (2 \cos \varphi - 2 \cos^2 \varphi + 1), \quad y = 2 r \operatorname{sen} \varphi (1 - \cos \varphi).$$

Trasportando l'origine nel punto A (fig. 56) e scrivendo in conseguenza $x + r$ in vece di x , si avrà:

$$x = 2r \cos \varphi (1 - \cos \varphi), \quad y = 2r \operatorname{sen} \varphi (1 - \cos \varphi).$$

Or se queste equazioni si elevino a quadrato e se ne faccia l'addizione, si otterrà:

$$x^2 + y^2 = 4r^2 (1 - \cos \varphi)^2,$$

e dividendone in vece la seconda per la prima, si avrà:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \text{quindi} \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

valore che sostituito nell'equazione precedente ci dà:

$$x^2 + y^2 = 2r (\sqrt{x^2 + y^2} - x),$$

ovvero

$$(x^2 + y^2)^2 + 4rx(x^2 + y^2) - 4r^2y^2 = 0,$$

per la richiesta equazione dell'epicicloide. La quale a cagione della sua figura cordiforme ha tolto il nome di cardiode.

Ponendo $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, si avrà per equazione polare della cardiode:

$$\rho = 2r (1 - \cos \theta) = 4r \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta.$$

Conducendo pel punto A una qualsivoglia retta MM', la quale incontri il cerchio fisso in un punto P, ponendo l'ang. MAX = θ , si avrà:

$$AM = 2r - 2r \cos \theta, \quad AM' = 2r + 2r \cos \theta,$$

quindi

$$AM + 2r \cos \theta = AM' - 2r \cos \theta = 2r;$$

e poichè nel triangolo ABP si ha $AP=2r \cos \theta$, sarà $PM=PM'=2r$, la quale proprietà della cardiode somministra un mezzo semplicissimo per la sua costruzione.

83. Quando il cerchio generatore va rotando sul lato interno, concavo della circonferenza del cerchio fisso (nel qual caso il raggio del primo cerchio dev' essere minore di quello del secondo), allora un determinato suo punto descriverà l'ipocicloide.

Le equazioni di questa curva si ottengono collo stesso metodo che quelle dell'epicicloide, al che accenna la fig. 57. Ma si dedurranno più facilmente da quelle dell'epicicloide, prendendo con segno contrario il raggio del cerchio generatore. Con ciò si avrà per l'ipocicloide il sistema di equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x &= (R - r) \cos \varphi + r \cos \frac{R-r}{r} \varphi, \\ y &= (R - r) \sin \varphi - r \sin \frac{R-r}{r} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

L'ipocicloide ancora si comporrà di un'infinità di archi eguali ad ADA', quando il rapporto $R : r$ sia irrazionale. Ma se i raggi sono commensurabili il numero degli archi sarà finito, e l'ipocicloide sarà in questo caso una curva algebrica, imperocchè l'eliminazione di φ dalle equazioni (1) condurrà ad un'equazione algebrica tra x ed y .

Un risultamento rimarchevole si avrà nella supposizione di $R=2r$, mercè la quale le equazioni (1) si trasformano in:

$$x = 2r \cos \varphi, \quad y = 0,$$

che chiaramente appartengono al diametro del cerchio fisso, condotto per l'origine del moto. In questo caso l'ipocicloide sarà dunque una retta, e propriamente il suddetto diametro del cerchio fisso.

Quando il raggio del cerchio generatore sia maggiore di quello del cerchio fisso, sarà necessario che la rotazione, nel caso di contatto interiore, avvenga sul lato convesso del cerchio fisso, e la curva generata sarà ancora un'epicicloide. Imperocchè ponendo nelle precedenti equazioni (1) $r=R+\rho$, esse prenderanno la forma:

$$x = (R + \rho) \cos \frac{\rho}{R+\rho} \varphi - \rho \cos \varphi,$$

$$y = (R + \rho) \operatorname{sen} \frac{\rho}{R + \rho} \varphi - \rho \operatorname{sen} \varphi,$$

le quali poi, facendovi $\frac{\rho}{R + \rho} \varphi = \psi$, quindi $\varphi = \frac{R + \rho}{\rho} \psi$,
divengono:

$$x = (R + \rho) \cos \psi - \rho \cos \frac{R + \rho}{\rho} \psi$$

$$y = (R + \rho) \operatorname{sen} \psi - \rho \operatorname{sen} \frac{R + \rho}{\rho} \psi,$$

le quali appartengono ad un'epicicloide, il cui cerchio generatore di raggio ρ tocca esteriormente il cerchio fisso di raggio R .

Donde si rileva che ogni epicicloide può esser generata di due maniere; o sul cerchio fisso di raggio R si muove il cerchio generatore di raggio ρ , toccandolo esteriormente; ovvero sullo stesso cerchio di raggio R si muove un cerchio di raggio $R + \rho$, avendo luogo un contatto interiore.

4. L'evolvente del cerchio.

86. Quando una linea retta si muova sulla circonferenza di un cerchio in modo che senza scorrere su essa la tocchi continuamente, allora un dato punto della retta descriverà una curva, la quale è denominata evolvente del cerchio.

Sia ABN (*fig. 58*) il cerchio, UM la retta in una posizione qualunque, nella quale tocchi il cerchio in un punto B ; sia M il punto descrivente, che in una precedente posizione della retta coincideva col punto A del cerchio; sia R il raggio del cerchio, e l'angolo $AOB = \varphi$. Prendendo il punto O per origine, ed il diametro OA prolungato per asse delle x , si avrà pel punto M della curva:

$$OP = x = OQ + MR; \quad MP = y = BQ - BR$$

$$OQ = R \cos \varphi, \quad MR = BM \operatorname{sen} \varphi,$$

$$BQ = R \operatorname{sen} \varphi, \quad BR = BM \cos \varphi,$$

in fine $BM = \operatorname{arc} AB = R \varphi$. Mercè la sostituzione di questi valori si avrà rispetto all'evolvente del cerchio il sistema delle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\cos \varphi + \varphi \operatorname{sen} \varphi), \\ y &= R(\operatorname{sen} \varphi - \varphi \cos \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Può l'evolvente del cerchio riguardarsi come un'epicicloide, nella quale il raggio del circolo generatore essendo divenuto infinito, il cerchio è degenerato in una retta. E per fermo le equazioni (1) dell'epicicloide (n° 84) si trasformano in quelle dell'evolvente del cerchio, ponendo in esse $r = \infty$. Così la prima di quelle equazioni, svolgendovi il coseno, diviene:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi + r \cos \varphi - r \cos \frac{R}{r} \varphi \cdot \cos \varphi + r \sin \frac{R}{r} \varphi \cdot \sin \varphi \\ &= R \cos \varphi + r \cos \varphi (1 - \cos \frac{R}{r} \varphi) + r \sin \frac{R}{r} \varphi \cdot \sin \varphi \\ &= R \cos \varphi + 2r \cos \varphi (\sin \frac{R}{2r} \varphi)^2 + r \sin \frac{R}{r} \varphi \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

Poniamo $\frac{R}{2r} \varphi = \alpha$, quindi $r = \frac{R \varphi}{2\alpha}$; ne viene:

$$x = R \cos \varphi + R \varphi \cos \varphi \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} + R \varphi \sin \varphi \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}.$$

Or lasciando crescere r sino all'infinito, α diverrà infinitesimo; e poichè:

$$\lim \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} = \lim \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \sin \alpha = 0, \text{ e } \lim \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 1; \text{ sarà:}$$

$$x = R (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi).$$

Similmente si formerà l'equazione per y .

Volendosi esprimere la curva per mezzo di coordinate polari, si avrà nell'ipotesi di $OM = \rho$ ed ang. $MOP = \theta$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$, quindi:

$$\rho = R \sqrt{1 + \varphi^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \varphi}{1 + \varphi \operatorname{tg} \varphi}.$$

E poichè ρ dovrà crescere all'infinito insieme con φ , egli è chiaro che la curva procederà formando infinite spire intorno al cerchio; e perciò va compresa nella famiglia delle spirali, di cui ci facciamo a considerare brevemente le cose più rimarchevoli.

Spirali.

87. Spirale diccsi ogni curva, la quale con infiniti giri, sem-

pre più allargandosi o sempre più restringendosi, circola intorno ad un punto fisso, da cui prende le mosse, o a cui si avvicina indefinitamente. In conseguenza della natura stessa di queste curve le loro equazioni assumono forme semplicissime mercè l'applicazione delle coordinate polari, ed in ciò si deve por mente alle cose dette in fine del n° 75.

1) La Spirale di Archimede. (fig 59) La sua equazione è:

$$r = a\theta, \quad (1)$$

in cui r rappresenta il raggio vettore OM di un punto qualunque della curva, θ l'angolo polare MOX , misurato dall'arco AP descritto dal centro O col raggio $= 1$, ed a una costante lineare. L'equazione dimostra che il raggio vettore è proporzionale all'angolo da esso descritto. Quindi si potrà immaginare questa spirale descritta con moto continuo nel seguente modo. Una retta indefinita OU si aggira intorno al punto O , e su essa si muove un punto M in modo da far cammino proporzionale all'angolo descritto dal raggio vettore: in tal modo il punto M descriverà la spirale di Archimede.

Dando a θ valori negativi l'equazione (1) rappresenterà la stessa spirale, ma in opposta posizione, e propriamente quella che si otterrebbe facendo girare intorno ad OV la spirale rappresentata nella figura. Le due spirali si contengono nella stessa equazione, sebbene ordinariamente se ne consideri una sola.

Siano r , r' i raggi vettori di due punti M , ed M' della spirale, ed appartengano ad angoli polari differenti per 360° : essendo $r = a\theta$, sarà $r' = a(\theta + 2\pi)$, quindi $r' - r = 2a\pi$. Donde segue che la distanza MM' dei successivi giri l'uno dall'altro, contata sul raggio vettore, è una quantità costante nella spirale di Archimede.

2) La spirale iperbolica. (fig 60). La sua equazione è:

$$r\theta = a, \quad (2)$$

e sulla simiglianza di questa equazione con quella dell'iperbole riferita agli assintoti poggia il nome di questa curva. Per $\theta = 0$ si ha $r = \infty$; facendo crescere θ , r diverrà sempre più piccolo senza divenir giammai $= 0$. La curva fa dunque da un solo lato

infiniti giri che vanno sempre più restringendosi intorno al polo, senza potervi giungere giammai, e che hanno un intervallo sempre minore. Quindi il polo forma un così detto punto assintotico.

Essendo M un punto della curva, $OM = r$, l'ang. $MOP = \theta$, $MP = y$, si ha $r = \frac{a}{\theta}$ ed $y = r \sin \theta$; con ciò;

$$y = a \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

Per ogni valore di θ che renda soddisfatta la relazione $\theta > 0$, sarà $\frac{\sin \theta}{\theta} < 1$, quindi $y < a$; e poichè $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$, ne segue che come θ andrà decrescendo, l'ordinata y si approssimerà al valore di a , mentre r si aumenta all'infinito. Donde segue che la spirale iperbolica da un altro lato ha per assintoto la retta UV, la quale corre parallelamente all'asse polare in una distanza $= a$.

3) La spirale logaritmica deriva dalla curva logaritmica, quando nell'equazione (1) di questa curva (n° 81) si riguardino x ed y come coordinate polari; quindi l'equazione della spirale logaritmica sarà:

$$r = ae^{\frac{\theta}{a}}, \text{ ovvero } \theta = al \frac{r}{a},$$

in cui e rappresenta la base dei logaritmi naturali. Per $\theta = 0$ si ha $r = a$, e per ogni valore positivo di θ si avrà un valore di r sempre crescente con θ , per $\theta = \infty$ sarà anche $r = \infty$. Pei valori negativi di θ , e cominciando da $\theta = 0$ a cui corrisponde $r = a$, i valori di r diverranno più piccoli, come l'espressione numerica di θ sarà più grande, dimodochè r diverrà infinitesimo quando sarà $\theta = -\infty$. La spirale logaritmica fa dunque intorno al polo infiniti giri, i quali da un lato si continuano all'infinito rendendo sempre più grandi i loro intervalli, e dall'altro lato sempre più si restringono avvicinandosi continuamente al polo senza giammai raggiungerlo. Anche per questa curva è dunque il polo un punto assintotico. I valori negativi di r sono possibili per quei soli valori di θ i quali sono espressi da fratti i cui denominatori sono numeri pari; vi ha dunque un'infinità di punti corrispondenti a simili valori di θ , ma essi non formano una serie continua.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE IN QUESTO VOLUME.

INTRODUZIONE

Contenente i principii dell' applicazione dell' algebra ai problemi geometrici determinati di 1° e 2° grado.

Capo primo. — Costruzione delle equazioni ad un' incognita di 1° e 2° grado. pag. v

Capo secondo — Applicazione dei principii precedenti alla soluzione di alcuni problemi. xii

SEZIONE PRIMA.

GEOMETRIA ANALITICA NEL PIANO.

Capo primo — Determinazione del luogo di un punto — Sistemi di coordinate — Trasformazione di esse . . . 1

— Trasformazione delle coordinate 3

— Distanza di due punti dati. 6

Capo secondo — Della linea retta.

— Equazione della retta e sue diverse forme 7

— Problemi sulla retta. 13

Capo terzo — Del cerchio.

— Equazione del cerchio 22

— Problemi sul cerchio 42

Congiunzione del cerchio colla retta.

— Condizione pel contatto — equazione della tangente. 28

— Alcuni teoremi sulla secante. 30

— Tangente menata da un punto esteriore al cerchio. 31

Congiunzione di più cerchi

— Condizioni per l' intersezione e contatto di due cerchi. 36

— Sulla cordale di due cerchi 38

Capo quarto — Delle linee del 2° ordine in generale, ossia della significazione geometrica dell' equazione generale del 2° grado tra due variabili.

— Osservazioni generali sulla classificazione delle linee 41

— Centro delle linee del 2° ordine 44

— Diametri delle linee del 2° ordine. 46

— Diametri principali. 43

— Trasformazione dell' equazione generale del 2° grado. 53

— Discussione dell'equazione $Mx^2 + Ny^2 = K$	34
— Discussione dell'equazione $Ny^2 + 2Rx = 0$	37
— Criterio per la determinazione della curva rappresentata da un'equazione di 2° grado	50
— Equazione al vertice delle linee del 2° ordine.	68
— Generazione delle curve del 2° ordine mercè l'intersezione di una retta mobile con un cerchio di raggio variabile — Proprietà generali.	62

Capo quinto — Di alcune più rilevanti proprietà delle linee del 2° ordine.

I. L'ellisse.

— Di alcune proprietà rispetto agli assi.	68
— Delle tangenti all'ellisse.	70
— Dei diametri dell'ellisse.	77
— L'ellisse riferita ad un sistema di diametri coniugati.	82

II. L'iperbole.

— Di alcune proprietà relative agli assi	87
— Delle tangenti all'iperbole. Gli assintoti.	88
— Dei diametri dell'iperbole	93
— Dell'iperbole riferita ad un sistema di diametri coniugati.	95
— L'iperbole riferita ai suoi assintoti.	97

III. La parabola.

— Delle tangenti alla parabola	101
— Dei diametri della parabola	106
— La parabola riferita ad un sistema di assi coniugati.	107

Capo sesto — Delle equazioni polari delle linee del 2° ordine, e della determinazione di queste curve dietro date condizioni.

— Equazioni polari delle linee del 2° ordine	109
— Determinazione delle linee del 2° ordine dietro date condizioni.	113

Capo settimo — Di alcune linee algebriche di ordine superiore, ed alcune curve trascendenti.

— Curve paraboliche — Parabole di ordine superiore	117
— Curva di Cassini — Lemniscata.	119
— La cissoide	122
— La logaritmica (logistica) — Catenaria.	123
— La cicloide comune.	125
— La cicloide allungata e l'accorciata.	127
— L'epicicloide e l'ipocicloide	128
— L'evolvente del cerchio.	132
— Linee spirali. La spirale di Archimede, l'iperbolica e la logaritmica	135

CONSIGLIO GENERALE DI PUBBLICA ISTRUZIONE

Napoli 24 Novembre 1858.

Vista la dimanda del tipografo Ferdinando Raimondi , con la quale ha chiesto di porre a stampa l'opera intitolata : *Elementi di Geometria Analitica* di Giuseppe Herr , tradotta dal Professore Zannotti.

Visto il parere del Regio Revisore Sig. D. Ambrogio Mendia.

Si permette che la detta opera si stampi ; ma non si pubblichi senza un secondo permesso , che non si darà , se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuto, nel confronto , essere la impressione uniforme all'originale approvato.

Il Consultore di Stato
Presidente provvisorio
CAPOMAZZA

Il Segretario generale
GIUSEPPE PIETROCOLA.

COMMISSIONE ARCIVESCOVILE

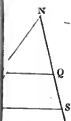
PER LA REVISIONE DEI LIBRI

Nihil obstat
JOSEPH MOLINARI
Censor Thol.

Pel Deputato
LEOPOLDO RUGGIERO
Segretario

Imprimatur Die XXIV Novembris MDCCCLVIII.

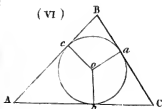
SBN 606807



(III)



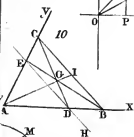
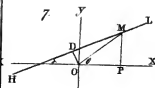
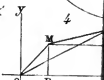
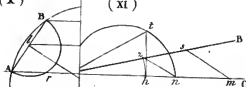
(VI)



(X)



(XI)



13

